Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **17** (2017) **031301** (899-905)
DOI: 10.5578/fmbd.66209
AKU J. Sci. Eng. **17** (2017) **031301** (899-905)

Lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-Asimptotik Denklik

Uğur Ulusu
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Afyonkarahisar.

e-posta: ulusu@aku.edu.tr

Geliş Tarihi: 22.09.2017; Kabul Tarihi: 11.12.2017

Anahtar kelimeler
Asimptotik denklik; İstatistiksel yakınsaklık; Lacunary dizi; $\mathbf{I}$-yakınsaklık; İnvaryant yakınsaklık.

Özet

Bu çalışmada, reel sayı dizileri için lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-asimptotik denklik, lacunary σ-asimptotik denklik ve p-kuvvetli lacunary σ-asimptotik denklik kavramları tanımlandı. Ayrıca, bu yeni denklik kavramları arasındaki ilişkiler verilerek, bu kavramların Savaş ve Patterson (2006) tarafından çalışılmış olan $S_{\sigma\theta}$-asimptotik denklik kavramı ile ilişkisinden bahsedildi.

Lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-Asymptotic Equivalence

Keywords
Asymptotic equivalence; Statistical convergence; Lacunary sequence; $\mathbf{I}$-convergence; Invariant convergence.

Abstract

In this paper, the concepts of lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-asymptotically equivalence, lacunary σ-asymptotically equivalence and p-strongly lacunary σ-asymptotically equivalence for real number sequences are defined. Also, by giving relationships among these new type equivalence concepts, we talked about the relationship of these concepts with the concept of $S_{\sigma\theta}$-asymptotically equivalence which is studied by Savaş and Patterson (2006).

1. Giriş

σ, pozitif tamsayılarda bir dönüşüm olsun. Sınırlı reel sayı dizi uzayı ℓ_∞ üzerinde sürekli bir lineer ϕ fonksiyoneli aşağıdaki şartları sağlıyorsa, invaryant ortalama veya σ-ortalama olarak adlandırılır;

1) Her n için $x_n \geq 0$ şartını sağlayan $x = (x_n)$ dizisi için $\phi(x) \geq 0$,
2) $e = (1,1,1,\ldots)$ olmak üzere, $\phi(e) = 1$ ve
3) Her $x \in \ell_\infty$ için $\phi\left(x_{\sigma(n)}\right) = \phi(x_n)$.

σ dönüşümünün n deki m. ötelemesi $\sigma^m(n)$ ile gösterilmek üzere, her n ve m pozitif tamsayıları için $\sigma^m(n) \neq n$ şartını sağlayan birebir dönüşüm olduğu kabul edilir. Böylece, ϕ yakınsak diziler uzayı c üzerindeki limit fonksiyonelinin bir genişlemesidir, yani $x \in c$ için $\phi(x) = \lim x$ olur.

σ dönüşümü, $\sigma(n) = n + 1$ olarak alındığında σ-ortalama genellikle Banach limiti olarak adlandırılır.

İnvaryant yakınsaklık kavramı başta Mursaleen (1979, 1983), Mursaleen ve Edely (2009), Nuray ve Savaş (1994), Nuray vd. (2011), Pancaroğlu ve Nuray (2013), Raimi (1963), Savaş (1989a, 1989b), Savaş ve Nuray (1993), Schaefer (1972) ve Ulusu ve Nuray olmak üzere pek çok yazar tarafından çalışılmıştır.

2. Temel Kavramlar

$\theta = \{k_r\}$ dizisi, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak şekilde artan bir tamsayı dizisi ise, lacunary dizi olarak adlandırılır. θ lacunary dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilir (Fridy and Orhan 1993).

Savaş (1989b) tarafından lacunary kuvvetli σ-yakınsaklık kavramı;

$$L_\theta = \left\{ x = (x_k) \colon \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \left| x_{\sigma^k(m)} - L \right| = 0 \right\}$$

(m ye göre düzgün) şeklinde verilmiştir.

Pancaroğlu ve Nuray (2013) tarafından lacunary invaryant toplanabilme kavramı ve $[V_{\sigma\theta}]_q$ uzayı aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{m\in I_r} x_{\sigma^m(n)} = L$$

limiti n ye göre düzgün ise, x dizisi L ye lacunary invaryant toplanabilirdir denir.

$x = (x_k)$ bir dizi ve $0 < q < \infty$ olmak üzere, eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{m\in I_r} \left|x_{\sigma^m(n)} - L\right|^q = 0$$

limiti n ye göre düzgün ise, x dizisi L ye kuvvetli lacunary q-invaryant yakınsaktır denir. Bu durum $x_k \to L\big([V_{\sigma\theta}]_q\big)$ biçiminde gösterilir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast (1951) tarafından tanıtılmış ve birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

$x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n: |x_k - L| \ge \varepsilon\}| = 0$$

ise x dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır denir. Burada dikey çizgiler, içerisinde bulunan kümenin eleman sayısını belirtmektedir.

Lacunary σ-istatistiksel yakınsak dizi kavramı Savaş ve Nuray (1993) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r: \left|x_{\sigma^k(n)} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

limiti n ye göre düzgün ise $x = (x_k)$ dizisi L ye $S_{\sigma\theta}$-yakınsaktır denir ve $S_{\sigma\theta} - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S_{\sigma\theta})$ biçiminde gösterilir.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ nin altkümelerinin $\mathbf{I}$ idealinin yapısı üzerine kurulan ve istatistiksel yakınsaklık kavramının bir genelleştirilmesi olan $\mathbf{I}$-yakınsaklık kavramı Kostyrko vd. (2000) tarafından tanıtılmıştır. Bu kavram üzerine Kostyrko vd. (2005) ve Nuray vd. (2011) de çalışmalar yapmışlardır.

Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathbf{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ kümesi bir ideal olarak adlandırılır;

1) $\emptyset \in \mathbf{I}$,
2) Her bir $E, F \in \mathbf{I}$ için $E \cup F \in \mathbf{I}$,
3) Her bir $E \in \mathbf{I}$ ve her bir $F \subseteq \mathrm{E}$ için $F \in \mathbf{I}$.

Eğer $\mathbf{I}$ ideali; $\mathbb{N} \notin \mathbf{I}$ şartını sağlıyorsa non-trivial ideal ve non-trivial bir ideal her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathbf{I}$ şartını sağlıyorsa admissible ideal olarak adlandırılır.

Bu çalışmadaki bütün idealler admissible ideal olarak kabul edilecektir.

$x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N}: |x_k - L| \ge \varepsilon\}$$

kümesi $\mathbf{I}$ idealine ait ise x dizisi L ye $\mathbf{I}$-yakınsaktır denir. Bu durum $\mathbf{I} - \lim x = L$ biçiminde gösterilir.

Aşağıdaki şartları sağlayan $\boldsymbol{\mathcal{F}} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ kümesi bir süzgeç olarak adlandırılır;

1) $\emptyset \notin \boldsymbol{\mathcal{F}}$,
2) Her bir $E, F \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ için $E \cap F \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$,
3) Her bir $E \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ ve her bir $F \supseteq E$ için $F \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Her bir $\mathbf{I}$ ideali için

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{I}) = \{M \subset \mathbb{N}: (\exists A \in \mathbf{I})(M = \mathbb{N}\backslash A)\}$$

şeklinde tanımlanan bir süzgeç vardır.

$\mathbb{N}$ nin bir A altkümesinin $\sigma\theta$-düzgün yoğunluğu kavramı ve bununla ilişkili olarak reel sayı dizileri için $\mathbf{I}_{\sigma\theta}$-yakınsaklık kavramı Ulusu ve Nuray tarafından verilmiştir.

$\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi, $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$s_r = \min_n |A \cap \{\sigma^m(n): m \in I_r\}|$$

ve

$$S_r = \max_n |A \cap \{\sigma^m(n): m \in I_r\}|$$

olsun. Eğer

$$\underline{V_\theta}(A) = \lim_{r\to\infty} \frac{s_r}{h_r}, \quad \overline{V_\theta}(A) = \lim_{r\to\infty} \frac{S_r}{h_r}$$

limitleri mevcut ise bunlara sırasıyla A kümesinin alt lacunary σ-düzgün (alt $\sigma\theta$-düzgün) yoğunluğu ve üst lacunary σ-düzgün (üst $\sigma\theta$-düzgün) yoğunluğu denir. Eğer $\underline{V_\theta}(A) = \overline{V_\theta}(A)$ ise,

$$V_\theta(A) = \underline{V_\theta}(A) = \overline{V_\theta}(A)$$

ifadesi A kümesinin lacunary σ-düzgün yoğunluğu veya $\sigma\theta$-düzgün yoğunluğu olarak adlandırılır.

$V_\theta(A) = 0$ şartını sağlayan $A \subseteq \mathbb{N}$ kümelerinin sınıfı $\mathbf{I}_{\sigma\theta}$ ile gösterilir.

Şimdi lacunary σ-düzgün yoğunluk kavramı yardımıyla herhangi bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisinin $\mathbf{I}_{\sigma\theta}$-yakınsaklığı kavramını verelim.

Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A_\varepsilon = \{k \in I_r: |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathbf{I}_{\sigma\theta}$ ya ait, yani $V_\theta(A_\varepsilon) = 0$ ise, x dizisi L ye $\mathbf{I}_{\sigma\theta}$-yakınsaktır denir. Bu durum $\mathbf{I}_{\sigma\theta} - \lim x_k = L$ biçiminde gösterilir.

Marouf (1993) reel sayı dizilerinin asimptotik denkliği ve asimptotik regüler matrisler için bazı temel tanımlar verdi. Daha sonra asimptotik denklik kavramı başta Patterson (2003), Patterson ve Savaş (2006), Savaş (2013), Savaş ve Başarır (2006), Savaş ve Patterson (2006) ve Ulusu olmak üzere pek çok araştırmacı tarafından geliştirilmiştir.

$x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_k \frac{x_k}{y_k} = 1$$

ise, x ve y dizilerine asimptotik denktir denir. Bu durum $x \sim y$ biçiminde gösterilir.

$\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r: \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

limiti $m = 1,2,\ldots$ ye göre düzgün ise, x ve y dizilerine L katlı $S_{\sigma\theta}$-asimptotik denktir denir. Bu durum $x \overset{S_{\sigma\theta}}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ olması durumunda $S_{\sigma\theta}$-asimptotik denklik elde edilir.

$\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| = 0$$

limiti $m = 1,2,\ldots$ ye göre düzgün ise, x ve y dizilerine L katlı kuvvetli σ-asimptotik lacunary denktir denir. Bu durum $x \overset{[N_{\sigma\theta}^L]}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ olması durumunda kuvvetli σ-asimptotik denklik elde edilir.

$x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A_\varepsilon = \left\{ k \in \mathbb{N}: \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \in \mathbf{I}_\sigma ,$$

yani $V(A_\varepsilon) = 0$ ise, x ve y dizilerine L katlı asimptotik $\mathbf{I}_\sigma$-denktir denir. Bu durum $x \overset{\mathbf{I}_\sigma^L}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ olması durumunda asimptotik $\mathbf{I}_\sigma$-denklik elde edilir.

3. Lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-Asimptotik Denklik

Bu kısımda, reel sayı dizileri için bazı asimptotik denklik kavramları tanımlandı. Ayrıca, bu yeni denklik kavramları arasındaki ilişkiler verilerek, bu kavramların $S_{\sigma\theta}$-asimptotik denklik kavramı ile ilişkisinden bahsedildi.

Tanım 3.1 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A_\varepsilon := \left\{ k \in I_r: \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \in \mathbf{I}_{\sigma\theta} ,$$

yani $V_\theta(A_\varepsilon) = 0$ ise, x ve y dizilerine L katlı lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-asimptotik denktir denir. Bu durum $x \overset{\mathbf{I}_{\sigma\theta}^L}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ için lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-asimptotik denklik elde edilir.

L katlı lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-asimptotik denk dizilerin sınıfı $\mathfrak{I}_{\sigma\theta}^{L}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} = L$$

limiti m ye göre düzgün ise, x ve y dizilerine lacunary σ-asimptotik denktir denir. Bu durum $x \overset{N_{\sigma\theta}^{L}}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ olması durumunda lacunary σ-asimptotik denklik elde edilir.

Teorem 3.1 $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ sınırlı diziler olmak üzere, eğer x ve y dizileri L katlı lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-asimptotik denk ise, o zaman bu diziler L katlı lacunary σ-asimptotik denktir.

İspat: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi, $m \in \mathbb{N}$ keyfi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Şimdi,

$$t(m,r) := \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right|$$

ifadesini hesaplayalım.

$$t^{(1)}(m,r) := \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k\in I_r \\ \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon}} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right|$$

ve

$$t^{(2)}(m,r) := \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k\in I_r \\ \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| < \varepsilon}} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right|$$

olmak üzere

$$t(m,r) \le t^{(1)}(m,r) + t^{(2)}(m,r)$$

dir. Burada, her $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi ve her $m = 1,2,\dots$ için

$$t^{(2)}(m,r) < \varepsilon$$

olduğu elde edilir. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri sınırlı olduğundan her $k \in I_r, m = 1,2,\dots$ için

$$\left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \le M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Bu durum ise

$$t^{(1)}(m,r) \le \frac{M}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \ge \varepsilon \right\} \right|$$

$$\le M \frac{\max_m \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \ge \varepsilon \right\} \right|}{h_r}$$

$$= M \frac{S_r}{h_r}$$

olmasını gerektirir. Böylece, x ve y dizilerinin L katlı lacunary σ-asimptotik denk oldukları elde edilir. ■

Teorem 3.1 in karşıtı genelde doğru değildir. Örneğin, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$x_k := \begin{cases} 2 \quad , & k_{r-1} < k < k_{r-1} + \left[\sqrt{h_r}\right] \\ & \text{ve } k \text{ çift tamsayı ise,} \\ 0 \quad , & k_{r-1} < k < k_{r-1} + \left[\sqrt{h_r}\right] \\ & \text{ve } k \text{ tek tamsayı ise.} \end{cases}$$

$$y_k := 1$$

σ dönüşümü, $\sigma(m) = m + 1$ olarak alınırsa, bu diziler lacunary σ-asimptotik denktir fakat lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-asimptotik denk değildir.

Tanım 3.3 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $0 < p < \infty$ olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \sum_{k\in I_r} \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right|^p = 0$$

limiti m ye göre düzgün ise, x ve y dizilerine L katlı p-kuvvetli lacunary σ-asimptotik denktir denir. Bu durum $x \overset{[N_{\sigma\theta}^{L}]_p}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ olması durumunda p-kuvvetli lacunary σ-asimptotik denklik elde edilir.

L katlı p-kuvvetli lacunary σ-asimptotik denk dizilerin sınıfı $\left[\aleph_{\sigma\theta}^L\right]_p$ ile gösterilir.

Teorem 3.2 $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda,

$$x \overset{[N_{\sigma\theta}^L]_p}{\sim} y \Rightarrow x \overset{\mathbf{I}_{\sigma\theta}^L}{\sim} y$$

dir.

İspat: $x \overset{[N_{\sigma\theta}^L]_p}{\sim} y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman, her $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi ve her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right|^p \geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon}}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right|^p$$

$$\geq \varepsilon^p \cdot \left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \varepsilon^p \cdot \max_m \left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

ve buradan

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right|^p$$

$$\geq \varepsilon^p \cdot \frac{\max_m \left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|}{h_r}$$

$$= \varepsilon^p \cdot \frac{S_r}{h_r}$$

elde edilir. Bu ise

$$\lim_{r\to\infty}\frac{S_r}{h_r} = 0$$

olmasını gerektirir. O halde $x \overset{\mathbf{I}_{\sigma\theta}^L}{\sim} y$ dir. ∎

Teorem 3.3 $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ sınırlı diziler ve $0 < p < \infty$ olsun. O zaman,

$$x \overset{\mathbf{I}_{\sigma\theta}^L}{\sim} y \Rightarrow x \overset{[N_{\sigma\theta}^L]_p}{\sim} y$$

dir.

İspat: $x, y \in \ell_\infty$, $x \overset{\mathbf{I}_{\sigma\theta}^L}{\sim} y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Kabulümüzden dolayı $V_\theta(A_\varepsilon) = 0$ dır. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ sınırlı diziler olduğundan her $k \in I_r, m = 1,2, \ldots$ için

$$\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Burada $\theta = \{k_r\}$ nin lacunary dizi ve $m \in \mathbb{N}$ olduğuna dikkat edilirse,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right|^p$$

$$= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r \\ \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon}}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right|^p$$

$$+ \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r \\ \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| < \varepsilon}}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right|^p$$

$$\leq M\frac{\max_m \left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|}{h_r} + \varepsilon^p$$

$$\leq M\frac{S_r}{h_r} + \varepsilon^p$$

dir. Böylece, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right|^p = 0$$

elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar. ∎

Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1 $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda,

$$\mathfrak{I}_{\sigma\theta}^L \cap \ell_\infty = \left[\aleph_{\sigma\theta}^L\right]_p \cap \ell_\infty$$

dur.

Şimdi, lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-asimptotik denklik kavramı ile Savaş ve Patterson (2006) tarafından çalışılmış olan $S_{\sigma\theta}$-asimptotik denklik kavramı arasındaki ilişkiyi verelim.

Teorem 3.4 $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerinin L katlı lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-asimptotik denk olması için gerek ve yeter şart bu dizilerin L katlı $S_{\sigma\theta}$-asimptotik denk olmasıdır.

Sonuç 3.2 Savaş ve Patterson (2006) tarafından yapılan çalışmadaki Teorem 3.6, Ulusu tarafından yapılan çalışmadaki Teorem 2.9 ve bu çalışmadaki Teorem 3.4 dikkate alındığında,

$$1 < \liminf_r q_r < \limsup_r q_r < \infty$$

şartını sağlayan her $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi için

$$x \overset{\mathbf{I}_{\sigma\theta}^L}{\sim} y \Leftrightarrow x \overset{\mathbf{I}_\sigma^L}{\sim} y$$

elde ederiz.

4. Kaynaklar

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, **2**, 241--244.

Fridy, J. A. and Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics*, **160**(1), 43--51.

Kostyrko, P., Macaj, M., Šalát, T. and Sleziak, M., 2005. $\mathbf{I}$-Convergence and Extermal $\mathbf{I}$-limits points. *Mathematica Slovaca*, **55**, 443--464.

Kostyrko, P., Šalát, T. and Wilczyński, W., 2000. $\mathbf{I}$-Convergence. *Real Analysis Exchange*, **26**(2), 669--686.

Marouf, M., 1993. Asymptotic equivalence and summability. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **16**(4), 755--762.

Mursaleen, M., 1979. On finite matrices and invariant means. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **10**, 457--460.

Mursaleen, M., 1983. Matrix transformation between some new sequence spaces. *Houston Journal of Mathematics*, **9**, 505--509.

Mursaleen, M. and Edely, O. H. H., 2009. On the invariant mean and statistical convergence. *Applied Mathematics Letters*, **22**(11), 1700--1704.

Nuray, F. and Savaş, E., 1994. Invariant statistical convergence and A-invariant statistical convergence. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **25**(3), 267--274.

Nuray, F., Gök, H. and Ulusu, U., 2011. $\mathbf{I}_\sigma$-convergence. *Mathematical Communications*, **16**, 531--538.

Pancaroğlu, N. and Nuray, F., 2013. Statistical lacunary invariant summability. *Theoretical Mathematics and Applications*, **3**(2), 71--78.

Patterson, R. F., 2003. On asymptotically statistically equivalent sequences. *Demostratio Mathematica*, **36**(1), 149--153.

Patterson, R. F. and Savaş, E., 2006. On asymptotically lacunary statistically equivalent sequences. *Thai Journal of Mathematics*, **4**(2), 267--272.

Raimi, R. A., 1963. Invariant means and invariant matrix methods of summability. *Duke Mathematical Journal*, **30**(1), 81--94.

Savaş, E., 1989a. Some sequence spaces involving invariant means. *Indian Journal of Mathematics*, **31**, 1--8.

Savaş, E., 1989b. Strongly σ-convergent sequences. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, **81**, 295--300.

Savaş, E., 2013. On $\mathbf{I}$-asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Advances in Difference Equations*, **111**(2013), 7 pages. doi:10.1186/1687-1847-2013-111

Savaş, E. and Nuray, F., 1993. On σ-statistically convergence and lacunary σ-statistically convergence. *Mathematica Slovaca*, **43**(3), 309--315.

Savaş, E. and Patterson, R. F., 2006. σ-asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Central European Journal of Mathematics*, **4**(4), 648--655.

Savaş, R. and Başarır, M., 2006. (σ, λ)-asymptotically statistical equivalent sequences. *Filomat*, **20**(1), 35--42.

Schaefer, P., 1972. Infinite matrices and invariant means. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **36**, 104--110.

Ulusu, U., (yayın aşamasında). Asymptotically ideal invariant equivalence.

Ulusu, U. and Nuray, F., (yayın aşamasında). Lacunary $\mathbf{I}_\sigma$-convergence.