

AKÜ FEMÜBİD 19 (2019) 011103 (60-66)

AKU J. Sci. Eng. 19 (2019) 011103 (60-66)

Doi: 10.35414/akufemubid.378360

Araştırma Makalesi / Research Article

**Newton'un Soğuma Kanunu: Kesirsel Bir Yaklaşım****Hüseyin Şirin, Abdullah Engin Çalık***Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü, Bornova, İzmir.**e-posta: huseyin.sirin@ege.edu.tr; engin.calik@ege.edu.tr*

Geliş Tarihi: 12.01.2018

; Kabul Tarihi: 06.02.2019

**Anahtar kelimeler**

Newton'un Soğuma Kanunu; Kesirsel Matematik; Kesirsel Türev Mertebesi.

**Öz**

Bu çalışmada Newton'un soğuma kanununu tasvir eden diferansiyel denklem Caputo kesirsel türevi kullanılarak yeniden tanımlanmış ve çözülmüştür. Bu yeni çözüm literatürdeki benzer kesirsel çözümlerden farklı olarak herhangi bir zaman parametresi içermemektedir. Elde edilen sonuçlar deneysel ve standart sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Deneysel sonuçlara en uygun olan kesirsel türev mertebesi elde edilmiştir.

**Newton's Law of Cooling: A Fractional Approach****Keywords**

Newton's Law of Cooling; Fractional Calculus; Fractional Derivative Order.

**Abstract**

In this work, the differential equation describing Newton's law of cooling has been redefined and solved using Caputo fractional derivative. Unlike similar fractional solutions in the literature, this new solution does not contain any time parameter. The obtained results have been compared with the experimental and the standard ones. Order of fractional derivative which is most suitable for the experimental results has been obtained.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

**1. Giriş**

Maddenin ısı kaybı ile çevrenin ve maddenin sıcaklıkları arasındaki ilişki bilimin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. İletim, taşınım, ve ışınlama başlıkları ile anılan ısı alışverişinde, taşınım ile ısı transferi bir katı yüzeyin temas ettiği akışkanla ısı alışverişidir. Taşınım ile ısı transferi iki biçimde ele alınabilir; doğal taşınım ve zorlanmış taşınım. Doğal taşınım hareketi meydana getiren bir dış etki yoktur ama zorlanmış taşınım hareketi dış bir etki ile meydana gelir (Jiji 2003, Baehr vd. 2006). Newton'un soğuma kanunu olarak da ele alınan bu transfer mekanizması mühendislik uygulamalarında ve derslerinde kendine yer bulmakta ve deneysel düzenekleri de öğrencilerin ısı konusunu anlaması açısından eğitimde de kullanılmaktadır (Gonzalez-Hernandez and Medellin-Verduzco 2017).

Isı kaybını matematiksel olarak ifade etmek ve uygun olarak çözmek gerekmektedir. Isının hareketini tasvir eden diferansiyel denklemi

standart yöntemler ile çözmek işlemin dinamiğini anlamak ve gerçekçi sistemlere daha uygun sonuçlar elde etmek açısından uygun olmadığı gibi deneysel sonuçlarla da tam bir uyum içinde değildir. Bu bağlamda aynı işlemi kesirsel matematik ile ele alarak çözmek, olayın dinamiğini anlamak ve gerçekçi sistemlere daha uygun sonuçlar elde etmek açısından daha uygundur.

Newton'un soğuma kanunu, cismin sıcaklığının cismi çevreleyen ortamın sıcaklığı arasındaki fark ile orantılı olması olarak tanımlanabilir. Newton'un soğuma kanununun matematiksel formülasyonu üstel azalan bir süreç olarak ele alınabilmektedir. Newton soğuma kanunu tasvir eden ve zamanla cisimlerin sıcaklık değişimlerini veren diferansiyel denklem birinci mertebeden olup;

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_E) \quad (1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Jiji, 2003). Bu denklemin standart matematik kullanılarak çözümü ise;

$$T(t) = T_E + ce^{-kt} \quad (2)$$

olup, başlangıçtaki sıcaklık  $T(0) = T_0$  olarak alınır;

$$T(t) = T_E + (T_0 - T_E)ce^{-kt} \quad (3)$$

olarak elde edilir. Burada,  $T_E$  çevre sıcaklığı,  $c$  ve  $k$  ise sırasıyla integrasyon ve taşınımı temsil eden sistem sabitleridir.

Deneysel değerler ve (3) denklemi ile elde edilen teorik sonuçlar karşılaştırıldığında aralarındaki uyumsuzluğu gidermek için kesirsel matematik kullanılarak çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Almeida 2017, Godinez et al. 2015, Gómez-Aguilar and Razo-Hernández 2014).

Almeida, deneysel verilere en uygun kesirsel diferansiyel denklemi bulmak için üç farklı model kullanmış ve Newton soğuma kanunu için en uygun çözüm elde edilmeye çalışmıştır. Bu modeller, standart denklem ve farklı çekirdek fonksiyonları kullanılarak elde edilen çözümlerdir (Almeida 2017). Almeida, (1) diferansiyel denklemini Caputo kesirsel türevini kullanarak,

$$\frac{d^\alpha T(t)}{dt^\alpha} = -k(T(t) - T_E) \quad (4)$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada  $\alpha$  kesirsel türev mertebesidir. Bu denklemin fiziksel olarak anlamlı olabilmesi için denklemin sağ ve sol tarafının boyutlarının aynı olması gerekir. Boyut analizi yapıldığında denklemin sağ ve sol tarafının aynı olmadığı kolayca görülebilmektedir.

Godinez ve arkadaşları, Newton soğuma kanununu temsil eden (1) denklemini lokal-olmayan zaman kesirsel ve lokal zaman kesirsel olarak oldukça karmaşık bir yapıda yeniden tanımlamışlar ve çözmüşlerdir (Godinez et al. 2015). (1) denklemini lokal-olmayan Caputo kesirsel türev tanımını kullanarak;

$$\frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha T(t)}{dt^\alpha} = -k(T(t) - T_E) \quad (5)$$

şeklinde yeniden yazmışlardır. Burada,  $\sigma^{1-\alpha}$  ifadesini boyutu  $s^{1-\alpha}$  olan zaman parametresi olarak tanımlamışlardır. Bu parametreyi kullanarak (5) denkleminin sağ ve sol taraflarının boyutlarını eşdeğer hale getirmişlerdir. Ayrıca denklemi tamamen boyutsuz hale getirmek için,  $\Theta = \frac{T}{T_E}$  boyutsuz sıcaklık ve  $\tau = \frac{t}{[t]}$  boyutsuz zaman tanımlamalarını yapmışlardır.  $[t] = \frac{1}{k\alpha\sigma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}$  ve  $\Theta(0) = \beta$  tanımlamalarını yaparak (5) denklemini

$$\frac{d^\alpha \Theta}{dt^\alpha} = 1 - \Theta \quad (6)$$

olarak ifade etmişler ve bu denklemin çözümünü de

$$\Theta(\tau) = 1 + E_\alpha(-\tau^\alpha)[\beta - 1] \quad (7)$$

şeklinde elde etmişlerdir. Burada  $E_\alpha(z)$  Mittag-Leffler (ML) fonksiyonudur.

Godinez ve arkadaşları (2015), (1) denklemini lokal olan modifiye edilmiş Riemann-Liouville kesirsel türev tanımını kullanarak,

$$\frac{1}{p^\alpha} \frac{d^\alpha T(t)}{dt^\alpha} = -k(T(t) - T_E) \quad (8)$$

şeklinde ifade etmişlerdir. Burada da  $\sigma$  ile aynı role sahip  $p$  parametresini tanımlamışlardır. Kesirsel lokal türevleri kullanarak,  $[t] = \frac{1}{kp^\alpha}$  ve  $\Theta(0) = \frac{T_0}{T_E} = \beta$  tanımlamalarını yaparak (8) denklemini boyutsuz olarak aynı (6) denklemi gibi yeniden tanımlamışlar ve çözümünü de (7) denklemi şeklinde elde etmişlerdir.

Gómez-Aguilar ve Razo-Hernández, (1) eşitliğinin iki yanının boyutunu eşdeğer yapabilmek için Godinez ve arkadaşlarının (2015) gibi boyutu  $s^{1-\alpha}$  olan  $\sigma^{1-\alpha}$  şeklinde bir zaman parametresi tanımlaması yaparak (1) denklemini Caputo kesirsel türev tanımını kullanarak,

$$\frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha T(t)}{dt^\alpha} = -k(T(t) - T_E) \quad (9)$$

şeklinde ifade etmişlerdir (Gómez-Aguilar and Razo-Hernández 2014).  $\alpha$  kesirsel türev mertebesi,  $\sigma$  zaman parametresi ve cismin ısı taşınım özelliklerini temsil eden  $k$  parametresi arasında  $\sigma = \frac{\alpha}{k}$  ilişkisi olduğunu varsayarak (9) denkleminin çözümünü,

$$T(t) = T_E + (T_0 - T_E)E_\alpha(-k^\alpha \alpha^{1-\alpha} t^\alpha) \quad (10)$$

şeklinde elde etmişlerdir.

Daha önceki çalışmalarımızda, (1) denklemine benzer birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin kesirsel matematik kullanılarak çözümleri yapılmıştır. Nükleer bozunma denklemi kesirsel matematik kullanılarak çözülmüş, alfa ve proton bozunmasına uygulaması yapılmıştır (Çalık vd. 2013, Çalık vd. 2014). Lambert-Beer yasası kesirsel çözülerek, beta parçacıklarının alüminyum soğuruculardan geçişleri incelenmiştir (Şen ve Çalık 2014, Şen vd. 2014). Doğru akım devrelerinden RC devresini temsil eden diferansiyel denklem kesirsel çözülerek, kondansatördeki yükün dolması ve boşalması deneysel veri ile karşılaştırılmıştır (Ertik vd. 2015). Türkiye'deki geçmiş yıllardaki net elektrik tüketim değerleri göz önünde bulundurularak, ülkemizin gelecekteki net elektrik tüketim değerleri kesirsel matematik kullanılarak yapılan modellemeyle tahmin edilmeye çalışılmıştır (Çalık ve Şirin 2017).

Bu çalışmada da (1) diferansiyel denklemi, literatürde yapılan kesirsel tanımlamalara göre daha basit bir şekilde ve herhangi bir parametre içermeden Caputo kesirsel türevi kullanılarak yeniden tanımlanmış ve çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar deneysel ve standart matematik ile elde edilen değerlerle karşılaştırılmıştır.

## 2. Materyal ve Metot

Kesirsel matematik, standart matematiğin açıklamada yetersiz kaldığı noktalarda tam sayı mertebeden türevler almak yerine keyfi mertebeden türev olarak sistemi tasvir etmemizi sağlayan matematiksel bir yöntem olup; fen ve mühendisliğin birçok alanında kullanılmaktadır (Oldham and Spainer 1974, Miller and Ross 1993, Carpinteri and Mainardi 1997, Podlubny 1999, Şirin vd. 2010, Şirin vd. 2011, Çalık vd. 2016, Büyükkılıç vd. 2016). Kesirsel türevin Grünwald – Letnikov (GL), Riemann-Liouville (RL), Caputo gibi birçok tanımı mevcuttur (Oldham and Spainer 1974, Miller and Ross 1993, Carpinteri and Mainardi 1997, Podlubny 1999). Caputo türevli kesirsel diferansiyel denklemler ile tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olması, Caputo türev tanımının Laplace dönüşümünün, tamsayı mertebeli türevlerin başlangıç değerlerinin kullanımına izin vermesi ve sabitin türevinin sıfır olması nedeniyle diferansiyel denklem çözümlerinde fizikçiler tarafından en çok kullanılan Caputo kesirsel türevidir.

Caputo kesirsel türev tanımı  $f$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  olmak üzere, integrallenebilen, zaman değişkenli bir fonksiyon ve  $m - 1 < \alpha \leq m$ , ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) olmak üzere,

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (11)$$

biçimindedir. (Podlubny 1999).

(1) denklemi Caputo kesirsel türevi kullanılarak;

$${}_0^C D_t^\alpha T(t) = -k^\alpha (T(t) - T_E) \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (12)$$

şeklinde yeniden tanımlanır ve çözümü için önce Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\tilde{T}(s) = \left( T_0 \frac{1}{s} + (k^\alpha + T_E) \frac{1}{s^{\alpha+1}} \right) \left( \frac{1}{1 + \frac{k^\alpha}{s^\alpha}} \right) \quad (13)$$

elde edilir. Burada,  $\tilde{T}(s)$ ,  $T(t)$  ifadesinin Laplace dönüşümü;  $s$ , Laplace dönüşüm parametresidir. (12) denkleminin sağ ve sol tarafının boyutunu eşdeğer yapabilmek için denklemin yapısında doğal olarak

bulunan  $k$  sabitinin üstüne  $\alpha$  kesirsel türev mertebesi kuvvet olarak gelmiştir. (13) ifadesine ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$T(t) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^n}{(n\alpha)!} - \frac{(k^\alpha + T_E)}{k^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^n}{(n\alpha)!} \quad (14)$$

elde edilir. (14) denklemi düzenlenirse (12) denkleminin çözümü,

$$T(t) = T_E + (T_0 - T_E)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha) \quad (15)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $E_\alpha(z)$  ML fonksiyonudur. Bu fonksiyon diferansiyel denklemlerin kesirsel matematik ile çözümlerinde sıkça karşımıza çıkan özel bir fonksiyondur. Tek parametrelili ML fonksiyonu,

$$E_\alpha(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha r + 1)}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Kesirsel türev mertebesi  $\alpha = 1$  için (15) denklemi standart matematik kullanılarak elde edilen (3) denkleme dönüşmektedir.

### 3. Bulgular

Gonzalez-Hernandez ve Medellin-Verduzco, (1) diferansiyel denkleminin temsil ettiği sistemlerin deneysel gözlemlerinin bu denklemi anlama ve kavramada faydasından bahsettikleri çalışmalarında, LM35 sıcaklık sensörü kullanarak oluşturdukları, ilk sıcaklığın 75 °C ve çevre sıcaklığının ise 30 °C olduğu deney düzeneğinde her 5 dakikada bir 30 dakikalık sürede sıcaklık ölçümü yapmışlardır (Gonzalez-Hernandez and Medellin-Verduzco 2017). Çizelge 1'in ikinci sütununda bu deneysel değerler görülmektedir. Çizelge 1'in üçüncü sütununda (1) diferansiyel denklemin standart matematik kullanılarak elde edilen çözümü olan (3) denklemi ile elde edilen sıcaklık hesaplamaları, dördüncü, beşinci ve altıncı sütunlarda ise bu çalışmada tanımlanan (12) kesirsel diferansiyel denkleminin çözümü olan (15) denklemi ile yapılan farklı kesirsel türev mertebeleri için

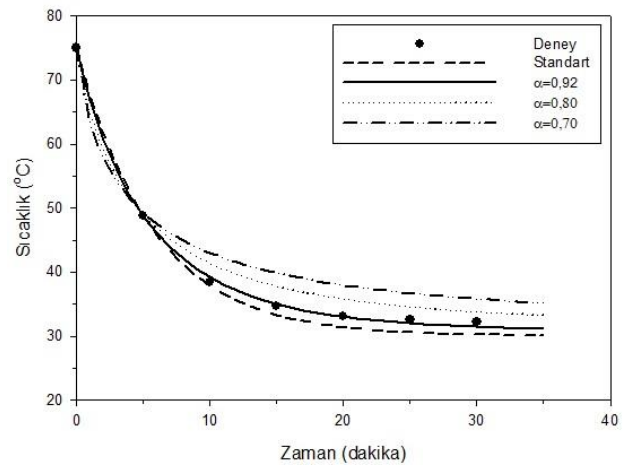
sıcaklık hesaplamaları yer almaktadır. Bu hesaplamalarda kesirsel türev mertebesi  $\alpha$  sırasıyla 0,92, 0,80 ve 0,70 olarak alınmıştır.

Şekil 1'de, Çizelge 1'de verilen değerler için sıcaklığın zamana göre değişimini veren grafiksel gösterim yapılmıştır. (15) denklemi ile farklı kesirsel türev mertebeleri için yapılan hesaplara ait sonuçlar Şekil 1'de gösterilmiştir.

Çizelge 2'de standart ve farklı kesirsel türev mertebesi ile yapılan sıcaklık hesaplamalarının deneysel değerlere göre yüzde bağıl hata hesapları  $\left(\left|T^{hesap} - T^{deney}\right|/T^{deney}\right) \times 100\%$  verilmiştir.

**Çizelge 1.** Deneysel değerler (Gonzalez-Hernandez and Medellin-Verduzco 2017), (3) denklemi ile hesaplanan standart ve bu çalışmada elde edilen (15) denklemi ile hesaplanan kesirsel sonuçlar.

Zaman (dakika)	Sıcaklık (°C)				
	Deney	Standart	$\alpha=0,92$	$\alpha=0,80$	$\alpha=0,70$
0	75,00	75,00	75,00	75,00	75,00
5	48,80	48,80	48,79	48,99	49,28
10	38,40	37,85	39,21	41,36	42,96
15	34,60	33,28	35,02	37,77	39,81
20	33,10	31,37	33,03	35,79	37,93
25	32,50	30,57	32,01	34,57	36,69
30	32,20	30,23	31,45	33,76	35,80



**Şekil 1.** Deneysel (Gonzalez-Hernandez and Medellin-Verduzco 2017), (3) denkleme ve (15) denklemi kullanılarak farklı kesirsel türev

mertebelerine göre yapılan sıcaklığın zamana göre değişimlerinin karşılaştırılması.

**Çizelge 2.** Deneysel değerler (Gonzalez-Hernandez and Medellin-Verduzco 2017) ile standart ve kesirsel hesaplamalar arasındaki yüzde bağlı hatalar  $((|T^{hesap} - T^{deney}|/T^{deney}) \times 100\%)$ .

Zaman (dakika)	Bağlı Hata (%)			
	Standart	Kesirsel $\alpha=0,92$	Kesirsel $\alpha=0,80$	Kesirsel $\alpha=0,70$
0	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,01	0,38	0,98
10	1,42	2,10	7,71	11,87
15	3,81	1,23	9,16	15,07
20	5,22	0,20	8,11	14,61
25	5,93	1,50	6,36	12,88
30	6,09	2,34	4,85	11,18

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Diferansiyel denklemleri çözerken standart türev operatörlerinin yerine kesirsel türev operatörlerini kullanmak sadece diferansiyel denklemleri genellemek amacı taşımamaktadır. Eğer gerçeğe yakın bir sistemi ya da sistemin dinamiğini tasvir etmek gerekiyor ise kesirsel matematik standart matematikten daha kullanışlı bir araçtır. Gerek zamanı gerekse konumu tam sayı mertebeden değil de kesirsel mertebeden alarak diferansiyel denklemleri çözmek hem gerçekçi tasvir hem de fiziksel anlam açısından daha doğru olmaktadır.

Sistemin lokal olmaması durumu konum kesirsel operatörlerle temsil edilirken, bellek etkisi ise zaman kesirsel operatörlerle temsil edilmektedir. Newton'un soğuma kanununda olduğu gibi ısı değişimi süreçlerindeki lokal olmama ve bellek etkisini ihmal ederek standart türevleri kullanmak bu süreçleri irdelemek için doğru bir araç değildir. Bu nedenle, bu çalışmada Newton'un soğuma kanununu temsil eden diferansiyel denklem zaman kesirsel türev operatörü kullanılarak çözülmüştür.

Newton'un soğuma kanunu için literatürde daha önce yapılan çalışmalara bakıldığında ya boyut problemi ya da denkleme eklenen parametreler yer almaktadır. Almeida (2017)'nin tanımlamış olduğu (4) denkleminin sağ ve sol tarafının boyutları birbirine eşit değildir. Godinez ve arkadaşları

(2015)'nin tanımlamış oldukları (5) ve (8) denklemlerinin ve Gómez-Aguilar ve Razo-Hernández (2014)'nin tanımlamış olduğu (9) denkleminin sağ ve sol taraflarının boyutlarını eşdeğer yapabilmek için denkleme bir zaman parametresi eklenmiştir. (5), (8) ve (9) denklemleri boyut problemi taşımamalarına rağmen, bu denklemleri çözebilmek için birçok yeni parametre, sabit ve tanımlama yapılarak denklemler ve denklemlerin çözümleri oldukça karmaşık bir hale getirilmiştir. Bu çalışmada ise Newton'un soğuma kanunu için tanımlanan (12) diferansiyel denkleminin sağ ve sol taraflarının boyutları birbirine eşdeğer olup, boyutları eşdeğer yapabilmek için bir parametre kullanılmamıştır.

Çizelge 1'den görülebileceği gibi, soğumanın ilk 5 dakikasındaki deneysel sonuçlarda sıcaklık değişimi 26,2 °C iken, sonraki adımlarda değişim miktarı azalmakta ve son adımda bu değişim 0,3 °C olmaktadır. Şekil 1'e bakıldığında soğumanın başlangıcında standart hesaplamalar ile deney sonuçları uyumluyken zaman ilerledikçe standart sonuçların deneysel değerlerden farklı olmaya başladığı görülmektedir. Başka bir deyişle ilk başlarda cismin ısı akışı hızlı olmaktadır zaman ilerledikçe ve denge sıcaklığına yaklaşıldıkça ısı akışı yavaşlamaktadır. Dolayısıyla birinci mertebeye türev içeren (1) diferansiyel denklemi bu süreci tam olarak tasvir edememektedir. Bu ısı akışının analizinin doğru bir şekilde yapılması gerekmektedir. (12) diferansiyel denklemi zaman kesirsel olup, buradaki kesirsel türev mertebesi cismin enerji kaybı için gerekli olan zamanı, başka bir deyişle ısı akış hızını belirler. Dolayısıyla, cismin yapıldığı malzemenin özelliklerine, cismin çevresi ile etkileşen yüzeyinin geometrisine ve taşınımın termodinamik özelliklerinden etkilenen cisim ile çevresi arasındaki sınır tabakasındaki koşullara bağlı olan  $k$  sabitinin (Gómez-Aguilar and Razo-,Hernández 2014) üstüne akış hızını belirleyen kesirsel türev mertebesi  $\alpha$ 'nın kuvvet olarak gelmesi de oldukça doğaldır. Bu yeni  $k^\alpha$  kesirsel taşınım katsayısıyla hem denklemin sağ ve sol taraflarının boyutları korunur, hem de sıcaklık farkından dolayı oluşan sınır tabakasındaki termal iletkenlik bu katsayı ile temsil edilmiş olur. Benzer şekilde Gómez-Aguilar ve Razo-Hernández

(2014)'de,  $\sigma = \frac{\alpha}{k}$  bağıntısıyla  $k$  parametresi ve  $\alpha$  kesirsel türev mertebesi arasında bir ilişki kurmuşlardır. Fakat bunu yaparken  $\sigma$  zaman parametresi adını verdikleri yeni bir parametre tanımlamışlardır.

Çizelge 2'den görüldüğü gibi bu çalışmada elde ettiğimiz sonuçlardan  $\alpha = 0.92$  türev mertebeli kesirsel sonuçların yüzde bağıl hataları, (3) denkleminde göre elde edilen sonuçlara göre ve diğer kesirsel hesaplama sonuçlarına göre genel olarak daha düşüktür. Benzer şekilde Çizelge 1 ve Şekil 1'den anlaşıldığı üzere sürecin başlangıç dakikalarında, deney, standart ve kesirsel hesaplamalar daha uyumluyken, zaman ilerledikçe standart sonuçlar deneysel değerlerin altında kalmaktadır. Bu çalışmada hesaplanan  $\alpha = 0.92$  türev mertebeli kesirsel sonuçlar ise standart sonuçlara göre deneysel değerlerle oldukça uyum içerisindedir.

Bu bağlamda, benzer süreçleri kesirsel matematik ile çözmek, deneysel uygulamalarda ve simülasyon hesaplarında ele almak sistemin evrimi ve dinamiği açısından daha düzgün sonuçlar almamızı sağlayabilecektir.

## 5. Kaynaklar

Almeida, R., 2017. What is the best fractional derivative to fit data?. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **11**, 358-368.

Baehr H. D. and Stephan K., 2006. Heat and Mass Transfer. Springer-Verlag, Berlin, 668p.

Büyükkılıç, F., Bayrakdar Ok, Z. and Demirhan, D., 2016. Investigation of the cumulative diminution process using the Fibonacci method and fractional calculus. *Physica A Statistical Mechanics and Its Applications*, **444**, 336-344.

Carpinteri, A. and Mainardi, F., 1997. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Springer Verlag, 348p.

Çalık, A. E., Ertik, H., Öder, B. and Şirin, H., 2013. A fractional calculus approach to investigate the alpha

decay processes. *International Journal of Modern Physics E*, **22 (7)**, 1350049-13 pages.

Çalık, A. E., Şirin, H., Ertik, H., Öder, B. and Şen, M., 2014. Half-lives of spherical proton emitters within the framework of fractional calculus. *International Journal of Modern Physics E*, **23 (9)**, 1450044, 11 pages.

Çalık, A.E., Şirin, H., Ertik, H. and Şen, M., 2016. Analysis of charge variation in fractional order LC electrical circuit. *Revista Mexicana de Física*, **62**, 437-441.

Çalık, A. E. and Şirin, H., 2017. Türkiye'deki elektrik enerji ihtiyacının matematiksel bir modellenmesi. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, **21 (6)**, 1475-1482.

Ertik, H., Çalık, A. E., Şirin, H., Şen, M. and Öder, B., 2015. Investigation of electrical RC circuit within the framework of fractional calculus. *Revista Mexicana de Física*, **61**, 58-63.

Godinez, F. A., Navarrete, M., Chavez, O. A., Merlin A. and Valdes J.R., 2015. Two fractal versions of Newton's Law of Cooling. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, **1**, 133-143.

Gómez-Aguilar, J. F. and Razo-Hernández J. R., 2014. Fractional Newton cooling law. *Investigación y Ciencia*, **61**, 12-18.

Gonzalez-Hernandez G.J. and Medellin-Verduzco C., 2017. An experimental setup for teaching Newton's Law of Cooling. *International Journal of Humanities and Social Science Invention*, **6 (1)**, 24-27.

Jiji, L. M., 2003. Heat Conduction. Springer-Verlag, Berlin, 418p.

Miller, K.S. and Ross, B., 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley and Sons Inc., New York, 384p.

Oldham, K. B. and Spanier, J., 1974. The Fractional Calculus. Academic Press, San Diego, 234p.

Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 368p.

Sokolov I. M., Klafter J. and Blumen A., 2002. Fractional Kinetics. *Physics Today*, **53**, 48-54.

- Şen, M. and Çalık, A. E., 2014. Calculation of half-value thickness for aluminum absorbers by means of fractional calculus. *Annals of Nuclear Energy*, **63**, 46-50.
- Şen, M., Çalık, A. E. and Ertik H., 2014. Determination of half-value thickness of aluminum foils for different beta sources by using fractional calculus. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, **335**, 78-84.
- Sirin, H., Buyukkilic, F., Ertik, H. and Demirhan, D., 2010. The influence of fractality on the time evolution of the diffusion process. *Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications*, **389(10)**, 2007-2013.
- Sirin, H., Buyukkilic, F., Ertik, H. and Demirhan, D., 2011. The effect of time fractality on the transition coefficients: Historical Stern-Gerlach experiment revisited. *Chaos Solitons and Fractals*, **44**, 43-47.