Afyon Kocatepe Üniversitesi
FEN BİLİMLERİ DERGİSİ

7 (1)
11-23

Afyon Kocatepe University
JOURNAL OF SCIENCE

BİR SINIF ÜÇÜNCÜ MERTEBE KISMİ TÜREVLİ LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİ HAKKINDA

Samed ALİYEV

Bakü Devlet Üniversitesi

ÖZET

Bu çalışmada aşağıdaki çok boyutlu başlangıç sınır-değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği araştırılmıştır:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}(L(u(t,x))) = F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}), t \in [0,T],\ x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(t,x)|_\Gamma = 0, \quad (3)$$

burada $0<T<+\infty$; $x=(x_1, \dots, x_n)$; Ω - yeteri kadar düzgün S sınırı olan n – boyutlu bölgedir;

$$u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}),$$

$$u_{xx} = (u_{x_1x_1}, \dots\dots, u_{x_1x_n}, \dots\dots, u_{x_nx_1}, \dots\dots, u_{x_nx_n}); \quad \Gamma=[0,T]\times S;$$

$$L(u(t,x)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j}\right) - a(x).u(t,x), \quad (4)$$

$a_{ij}(x)$ (i, j=1,.....,n) ve $a(x)$ ise Ω bölgesinde ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlardır ve aşağıdaki koşulları sağlıyorlar:

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x); \quad a(x)\geq 0; \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \quad (5)$$

en az bir $\alpha>0$ ve her reel ξ_i (i=1, ..., n) sayıları için; φ, ψ, F – verilmiş fonksiyonlardır.

ON THE SOLUTIONS OF A CLASS OF THE NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF 3 – rd ORDER

ABSTRACT

In this study we investigate the existence and uniqueness of the solutions of the multidimensional initial – boundary value problem:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}(L(u(t,x))) = F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}), \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega,$$

(1)

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(t,x)|_\Gamma = 0\ , \tag{3}$$

where $0<T<+\infty$; $x=(x_1, \dots, x_n)$; Ω is n-dimensional bounded domain with enough smooth boundary S;

$$u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}),$$

$$u_{xx} = (u_{x_1x_1}, \dots\dots, u_{x_1x_n}, \dots., u_{x_nx_1}, \dots\dots, u_{x_nx_n}); \quad \Gamma=[0,T]\times S;$$

$$L(u(t,x)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j}\right) - a(x).u(t,x), \tag{4}$$

$a_{ij}(x)$ $(i, j=1,\dots..,n)$ and $a(x)$ are measurable and bounded in the Ω, and satisfy the following conditions:

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x); \quad a(x)\geq 0; \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \tag{5}$$

for some $\alpha>0$ and for real ξ_i $(i=1, \dots, n)$; φ, ψ, F – are given functions.

1. GİRİŞ

Fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}(Lu) = F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})$$

denkleminin özel basit durumları araştırılmıştır.

Bu tipten problemin $L=\Delta$, $n\leq 3$ ve $F=\Delta u+f(u)$ özel durumlarını G.F. Webb incelemiştir [2]. Problemin $n=1$, $\Omega=(0,1)$ ve $Lu=\alpha.u_{xx}$ özel durumlarını da T.A. Şarifov incelemiştir [3]. Problemin $F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})=\Im(u(t,x))$ durumunu Khudaverdiyev K.İ. ile Aliyev S.C. n'nin tüm değerleri için incelenmiştir [4]. Adı geçen çalışmadaki $\Im(u(t,x))$, lineer olmayan operatördür. Khudaverdiyev K.İ. ve İsmailov A.İ. problemin $F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}) = F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}, a(t))$ ve $n=1$ özel durumlarını incelemiştir [5]. Son zamanlarda ise $u_{tt} - \alpha \,.\, u_{txx} = F(t, x, u, u_x, u_{xx})$ denkleminin bir boyutlu durumu Khudaverdiyev K.İ. ve Hüseynova N.R. tarafından ele alınmıştır [6].

Çalışmamızın esas ayırıcı özelliği problemin, n'nin sınırlı değerleri için değil de tüm değerleri için incelenmesidir.

Bizim çalışmamızda hemen hemen her yerde çözüm tanımlandıktan sonra her n için (1) – (3) probleminin hemen hemen her yerde çözümünün varlığı ve tekliği hakkında teoremler elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Çalışmamızda Ladıjenskaya O.A.'nın tanımladığı $\overset{o}{D}(\Omega)$ ve $\overset{o}{D}_1(Q_T)$ sınıflarından yararlanacağız ([1], sayfa 38). n – boyutlu Ω bölgesinde sürekli diferensiyellenebilir ve Ω'nın sınırına yakın noktalarda sıfıra eşit olan tüm fonksiyonların kümesine $\dot{D}(\Omega)$ denir. $\dot{D}(\Omega)$'nın $W_2^1(\Omega)$ uzayının normuna göre kapanışına da $\overset{o}{D}(\Omega)$ sınıfı diyeceğiz. $W_2^1(\Omega)$ uzayının tamlığından dolayı $\overset{o}{D}(\Omega)\subset W_2^1(\Omega)$ dır.

n+1 boyutlu $Q=[0,T]$ x Ω bölgesini ele alalım. $\Omega_ç$ ile Ω 'nın sınırına yakın olan noktaların kümesini gösterelim, öyle ki $\Omega_ç$ kümesinin elemanları Ω'nın sınırından en fazla ς uzaklığındadırlar. Q=[0,T] x Ω bölgesinde sürekli diferensiyellenebilir ve [0,T] x Ω_ς'da sıfıra eşit olan tüm u(t,x) fonksiyonların kümesine $\dot{D}_1(Q)$ denir. $\dot{D}_1(Q)$'nin $W_2^1(Q)$ uzayının normuna göre kapanışına da $\overset{o}{D}_1(Q)$ sınıfı diyeceğiz. $\overset{o}{D}_1(Q) \subset W_2^1(Q)$ dir.

(1) – (3) problemini incelemek amacıyla (4) ifadesiyle tanımlanan L operatörünün önemli bir özelliğini ([1], sayfa 45) göz önüne alalım: (4) ifadesi ve (3) sınır şartları ile tanımlanan L operatörünün sonsuz sayıda

$$0 > -\lambda_1^2 \geq -\lambda_2^2 \geq \ldots \geq -\lambda_s^2 \geq \ldots (s \to \infty \text{ iken } 0 < \lambda_s < +\infty)$$

negatif özdeğerleri ve $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayında tam ve ortonormal olan $\upsilon_s(x)$ genelleşmiş özfonksiyonlar sistemi mevcuttur.

Ayrıca, L operatörünün her bir $\upsilon_s(x)$ genelleşmiş özfonksiyonu sıfıra özdeş olmayan ve $\overset{o}{D}(\Omega)$ sınıfının elemanı olup $\forall \Phi(x) \in \overset{o}{D}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \upsilon_s(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} + a(x)\upsilon_s(x)\Phi(x) \right\} dx = \lambda_s^2 \cdot \int_\Omega \upsilon_s(x)\Phi(x)\,dx$$

integral özdeşliğini sağlayan bir fonksiyondur.

(1) – (3) problemini incelemek amacıyla $B_{\beta_0,\ldots,\beta_\ell,T}^{\alpha_0,\ldots,\alpha_\ell}$ Banach uzaylarını tanımlayalım. Bu uzayın elemanları, Q_T=[0,T]× Ω'dan alınan u(t,x)=$\sum_{s=1}^{\infty} u_s(t).\upsilon_s(x)$ biçimindeki fonksiyonlardır, öyle ki $u_s(t)$ fonksiyonları [0,T] aralığında $\ell \geq 0$ mertebeden sürekli diferensiyellidirler ve

$$\sum_{i=0}^{\ell} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left(\lambda_s^{\alpha_i} . \max_{0 \leq t \leq T} \left| u_s^{(i)}(t) \right| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} \equiv J_T(u) < +\infty$$

koşulunu sağlıyorlar; burada $\alpha_i \geq 0$, $1 \leq \beta_i \leq 2$, i=0,1, ... , ℓ dir.

Bu uzayda normu || u || =$J_T(u)$ biçiminde tanımlayalım. Bu tip uzayların hepsi Banach uzaylarıdır.

Bu çalışmada (1) – (3) probleminin hemen hemen her yerde çözümü araştırıldığından dolayı bu çözümü de tanımlayalım. (1) – (3) probleminin hemen hemen her yerde çözümü aşağıdaki özellikleri taşıyan $u(t,x) \in \overset{0}{D}_1(Q_T)$ fonksiyonuna denir:

i) u(t,x) fonksiyonu $u_t(t,x)$, $u_{x_i}(t,x)$, $u_{tx_i}(t,x), u_{x_ix_j}(t,x), u_{tt}(t,x)$ ve $u_{tx_ix_j}(t,x)\,(i,j=1,\ldots,n)$ türevleri ile birlikte $L_2(Q_T)$'nin elemanlarıdır; burada $Q_T=[0,T]\times\Omega$ dır.

ii) u(t,x) fonksiyonu (1) denklemini Q_T'de hemen hemen her yerde sağlıyor, yani denklemi sağlayamadığı noktalar kümesinin ölçümü sıfırdır.

iii) u(t,x) fonksiyonu (2) başlangıç değerlerini

$$\int_\Omega \{u(t,x)-\varphi(x)\}^2 dx \to 0, \quad \int_\Omega \{u_t(t,x)-\psi(x)\}^2 dx \to 0 \quad (t\to +0)$$

anlamında alıyor.

Fourier yöntemi uygulanarak (1) – (3) probleminin hemen hemen her yerde çözümü,

$$u(t,x)=\sum_{s=1}^{\infty} u_s(t).\upsilon_s(x)$$

biçiminde aranacaktır. Burada u(t,x) fonksiyonunun

$$u_s(t)=\int_\Omega u(t,x).\upsilon_s(x)dx$$

Fourier katsayılarının bulunuşu [0,T] aralığında aşağıdaki sonsuz sayıda lineer olmayan integro – diferensiyel denklemler sisteminin çözümüne indirgenir:

$$u_s(t)=\varphi_s+\frac{1}{\lambda_s^2}(1-e^{-\lambda_s^2 t})\psi_s+\frac{1}{\lambda_s^2}\int_0^t\int_\Omega \Im(u(\tau,x)).\left[1-e^{-\lambda_s^2(t-\tau)}\right].\upsilon_s(x)dxd\tau$$

(s=1,2...) (6)

burada

$$\varphi_s = \int_\Omega \varphi(x).\upsilon_s(x)dx, \quad \psi_s = \int_\Omega \psi(x).\upsilon_s(x)dx \text{ ve}$$

$$\Im(u(\tau,x))=F(\tau,x,u(\tau,x),\ u_\tau(\tau,x),\ u_x(\tau,x),\ u_{\tau x}(\tau,x),\ u_{xx}(\tau,x)) \text{ dir.} \tag{7}$$

(6) denklemler sisteminin çözümünün varlığını şöyle kanıtlayabiliriz:
(1) denkleminden $\forall\Phi(t,x)\in L_2(Q_T)$ için,

$$\int_0^T\int_\Omega \left\{ u_{tt}(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}\left(L(u(t,x))\right) - \Im(u(t,x)) \right\}.\Phi(t,x)dxdt = 0, \tag{8}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\Im(u(t,x))$ operatörü (7) eşitliği ile tanımlanmıştır.

Özel olarak,

$$\Phi(t,x)=\begin{cases}(t-\tau)^2.\upsilon_s(x) & 0\le t\le\tau,\ x\in\Omega \text{ ise}\\ 0 & \tau<t\le T,\ x\in\Omega \text{ ise}\end{cases}$$

alalım. Burada s=1,2, ... ve $\tau\in[0,T]$ dir. (2) başlangıç koşullarını göz önüne alarak (8) eşitliğinin birinci terimine t'ye göre iki kere ve ikinci terimine de t'ye göre bir kere parçalı integrasyon yöntemi uygulanırsa,

$$2\int_0^\tau u_s(t)dt - 2\lambda_s^2\int_0^\tau (t-\tau)u_s(t)dt - \int_0^\tau (t-\tau)^2\Im_s(u;t)dt - 2\tau\varphi_s - \tau^2\psi_s - \lambda_s^2\tau^2\varphi_s = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Im_s(u;t) = \int_\Omega \Im(u(t,x))\upsilon_s(x)dx$ dir.

Yukarıdaki eşitliğin τ değişkenine göre arka arkaya üç kere diferensiyelini alırsak,

$$u_s''(\tau) + \lambda_s^2 u_s'(\tau) = \Im_s(u;\tau) \qquad (\tau\in[0,t]),$$
$$u_s(0)=\varphi_s, \quad u_s'(0)=\psi_s$$

problemini elde ederiz. Bu problemi çözersek (6) denklemler sistemini elde ederiz.
Çalışmamızda aşağıdaki yardımcı önermeden de yararlanacağız [7].

Yardımcı Önerme:

(1) – (3) probleminin hemen hemen her yerde çözümü olan u(t,x) fonksiyonunun $\frac{\partial}{\partial x_k} a_{ij}(x)$ $(i,j,k=1,...,n)$ genelleşmiş türevleri Ω'da sınırlı ise $u_s(t)=\int_\Omega u(t,x).\upsilon_s(x)dx$ $(s=1,2,...)$ fonksiyonları [0,T] aralığında (6) denklemler sistemini sağlar.

3. (1) – (3) PROBLEMİNİN HEMEN HEMEN HER YERDE ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİ

Teorem 1:

Aşağıdaki koşullar sağlandığında (1) – (3) probleminin $B^{3,2}_{2,2,T}$ uzayında hemen hemen her yerde çözümü varsa, tektir.

1- $a_{ij}(x) \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$ (i,j=1, ... , n); $a(x) \in C(\overline{\Omega})$; $S \in C^2$;

L operatörünün $\upsilon_s(x)|_s = 0$ sınır koşulunu sağlayan $\upsilon_s(x)$ özfonksiyonları $\overline{\Omega}$'da ikinci mertebeden sürekli diferensiyellenebilirdirler.

2. $F(t, x, u_1, ..., u_N)$ $(N=2+2n+n^2)$ fonksiyonu kapalı $\overline{Q}_T x(-\infty, \infty)^N$ bölgesinde süreklidir.

3. n=1 ve $\forall R>0$ için $Q_T x[-R, R]^N$ bölgesinde

$$|F(t,x,u_1,...,u_N) - F(t,x,\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_N)| \le C_R.\sum_{i=1}^{N}|u_i - \tilde{u}_i|;$$

n=2,3 ve $\forall R>0$ için $Q_T x[-R, R]^{n+2} \times (-\infty, \infty)^{N-(n+2)}$ bölgesinde

$$|F(t,x,u_1,...,u_N) - F(t,x,\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_N)| \le C_R.\sum_{i=1}^{N}|u_i - \tilde{u}_i|;$$

n=4,5 ve $\forall R>0$ için $Q_T x[-R, R] \times (-\infty, \infty)^{N-1}$ bölgesinde

$$|F(t,x,u_1,...,u_N) - F(t,x,\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_N)| \le$$

$$\leq C_R \cdot \left\{ |u_1 - \tilde{u}_1| + \sum_{i=2}^{n+2} (1+|u_i|^\beta + |\tilde{u}_i|^\beta).|u_i - \tilde{u}_i| + \sum_{i=n+3}^{N} |u_i - \tilde{u}_i| \right\};$$

$n \geq 6$ için ise $Q_T \times (-\infty, \infty)^N$ bölgesinde

$$|F(t,x,u,u_1,...,u_N) - F(t,x,\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_N)| \leq$$
$$\leq C.\left\{ (1+|u_1|^\alpha + |\tilde{u}_1|^\alpha).|u_1 - \tilde{u}_1| + \sum_{i=2}^{n+2} (1+|u_i|^\beta + |\tilde{u}_i|^\beta).|u_i - \tilde{u}_i| + \sum_{i=n+3}^{N} |u_i - \tilde{u}_i| \right\}$$

koşulları sağlanıyor.

Burada $C_R>0$, $C>0$ sabitler ve $n \geq 6$ olduğunda $0 < \alpha \leq \frac{4}{n-6}$; $n \geq 4$ olduğunda ise $0 < \beta \leq \frac{2}{n-4}$ dir.

İspat:

(1) – (3) probleminin $B_{2,2,T}^{3,2}$ uzayında $u(t,x) = \sum_{s=1}^{\infty} u_s(t).\upsilon_s(x)$ ve $\tilde{u}(t,x) = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{u}_s(t)\upsilon_s(x)$ gibi iki farklı hemen hemen her yerde çözümü olduğunu varsayalım. O halde yukarıdaki yardımcı önermeden yararlanarak (6) denklemler sisteminden $\forall t \in [0,T]$ için,

$$\left\| u - \tilde{u} \right\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 \leq C. \int_0^t \int_\Omega \{\Im(u(\tau,x)) - \Im(\tilde{u}(\tau,x))\}^2 dx\, d\tau \tag{9}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $C>0$ sabittir. (9) eşitsizliğinden, $B_{2,2,T}^{3,2}$ ve $B_{2,2,T}^{2,1}$ uzaylarının özelliklerinden, Sobolev'in dahil etme teoremlerinden, Ladıjenskaya'nın [1] çalışmasındaki eşitsizliklerden (Sayfa 84'te (18) ve sayfa 88'de (2.1) eşitsizlikleri) ve teoremin 3. koşullarından yararlanarak $\forall t \in [0,T]$ için,

$$\left\| u - \tilde{u} \right\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 \leq C_0 . \int_0^t \left\| u - \tilde{u} \right\|_{B_{2,2,\tau}^{2,1}}^2 d\tau \tag{10}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $C_0>0$ sabittir.

Belman eşitsizliğinden yararlanarak (10) eşitsizliğinden $\|u-\tilde{u}\|_{B^{2,1}_{2,2,T}}=0$ olduğunu elde ederiz.

Bundan dolayı $u=\tilde{u}$ dir. Teorem ispat edildi.

4. T NİN YETERİ KADAR KÜÇÜK DEĞERLERİ İÇİN (1) – (3) PROBLEMİNİN HEMEN HEMEN HER YERDE ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

Teorem 2:

Aşağıdaki koşullar sağlandığında (1) – (3) probleminin T'nin yeteri kadar küçük değerleri için $B^{3,2}_{2,2,T}$ uzayında hemen hemen her yerde bir tek çözümü vardır.

1. $a_{ij}(x)\in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ (i,j=1,..., n); $a(x)\in C^{(1)}(\overline{\Omega})$; $S\in C^3$;

L operatörünün $\upsilon_s(x)|_s=0$ sınır koşulunu sağlayan $\upsilon_s(x)$ özfonksiyonları $\overline{\Omega}$'da üçüncü mertebeden sürekli diferensiyellenebilirdirler;

$\varphi(x)\in W_2^3(\Omega)\cap \overset{o}{D}(\Omega)$;

$L(\varphi(x))\in \overset{o}{D}(\Omega)$;

$\psi(x)\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{o}{D}(\Omega)$.

2. $F(t,\ \xi_1,...,\ \xi_{\tilde{N}})$ $(\tilde{N}=n+N=2+3n+n^2)$ fonksiyonu $F_{\xi_i}(t,\xi_1,...,\xi_{\tilde{N}})$ $(i=1,2,....,\tilde{N})$ türevleri ile birlikte $\overline{Q}_T x\ (-\infty,\infty)^N$ bölgesinde süreklidirler.

3. $\forall t\in[0,T]$, $x\in S$; $\xi_{n+3},...,\xi_{\tilde{N}}\in(-\infty,\infty)$ için $F(t,x,0,0,\xi_{n+3},...,\xi_{\tilde{N}})=0$ dır.

4. i=1, 2, ..., 2n+2 değerleri için

<u>n=2</u> olduğunda $\forall R>0$ için $\Omega_1\equiv Q_T x[-R,R]^{n+2}\times(-\infty,\infty)^{N-(n+2)}$ $(N=2+2n+n^2)$ bölgesinde,

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_1,...,\xi_{\tilde{N}})\right|\le C_R.\left\{1+\sum_{j=2n+3}^{\tilde{N}} e^{|\xi_j|^{2-\varepsilon}}\right\},\ \varepsilon>0,\ \tilde{N}=2+3n+n^2 \text{ eşitsizliği;}$$

<u>n=3</u> olduğunda $\forall R>0$ için Ω_1 bölgesinde,

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_1,\dots,\xi_{\tilde{N}})\right| \le C_R.\left\{1+\sum_{j=2n+3}^{\tilde{N}}\left|\xi_j\right|^{\gamma_i}\right\}$$ eşitsizliği;

n=4 olduğunda $\forall R>0$ için $\Omega_2 \equiv Q_T x[-R,R]\times(-\infty,\infty)^{N-1}$ bölgesinde,

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_1,\dots,\xi_{\tilde{N}})\right| \le C_R.\left\{1+\sum_{j=n+2}^{2n+2}e^{\left|\xi_j\right|^{2-\varepsilon}}+\sum_{j=2n+3}^{\tilde{N}}\left|\xi_j\right|^{\gamma_i}\right\},\ \varepsilon>0$$ eşitsizliği;

n=5 olduğunda $\forall R>0$ için Ω_2 bölgesinde,

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_1,\dots,\xi_{\tilde{N}})\right| \le C_R.\left\{1+\sum_{j=n+2}^{2n+2}\left|\xi_j\right|^{\beta_i}+\sum_{j=2n+3}^{\tilde{N}}\left|\xi_j\right|^{\gamma_i}\right\}$$ eşitsizliği;

n=6 olduğunda $\Omega_3 \equiv Q_T\times(-\infty,\infty)^N$ bölgesinde,

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_1,\dots,\xi_{\tilde{N}})\right| \le C.\left\{1+e^{\left|\xi_{n+1}\right|^{2-\varepsilon}}+\sum_{j=n+2}^{2n+2}\left|\xi_j\right|^{\beta_i}+\sum_{j=2n+3}^{\tilde{N}}\left|\xi_j\right|^{\gamma_i}\right\},\ \varepsilon>0$$ eşitsizliği;

n≥7 olduğunda Ω_3 bölgesinde,

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_1,\dots,\xi_{\tilde{N}})\right| \le C.\left\{1+\left|\xi_{n+1}\right|^{\alpha_i}+\sum_{j=n+2}^{2n+2}\left|\xi_j\right|^{\beta_i}+\sum_{j=2n+3}^{\tilde{N}}\left|\xi_j\right|^{\gamma_i}\right\}$$ eşitsizliği sağlanır.

5. $i=2n+3,\dots,\tilde{N}$ değerleri için ise,

n=2,3 olduğunda $\forall R>0$ için Ω_1 bölgesinde,

n=4,5 olduğunda $\forall R>0$ için Ω_2 bölgesinde,

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_1,\dots,\xi_{\tilde{N}})\right| \le a_R(t),\quad a_R(t)\in L_2(0,T)$$ eşitsizliği;

n≥6 olduğunda ise Ω_3 bölgesinde,

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_1,\dots,\xi_{\tilde{N}})\right| \le a(t),\quad a(t)\in L_2(0,T)$$ eşitsizliği sağlanır.

Burada $C_R>0$, $C>0$ sabitler ve

i=1,2,...,n için n≥7 ise $0<\alpha_i<\frac{n}{n-6}$,

n≥5 ise $0<\beta_i<\frac{n}{n-4}$, n≥3 ise $0<\gamma_i<\frac{n}{n-2}$;

i=n+1 için n≥7 ise $0<\alpha_i<\frac{4}{n-6}$, n≥5 ise $0<\beta_i<\frac{4}{n-4}$,

n=3,4 ise $0<\gamma_i<\frac{n}{n-2}$, n≥5 ise $0<\gamma_i<\frac{4}{n-2}$;

i=n+2,...,2n+2 için n≥7 ise $0<\alpha_i<\frac{2}{n-6}$, n≥5 ise $0<\beta_i<\frac{2}{n-4}$,

n≥3 ise $0<\gamma_i<\frac{2}{n-2}$ dir.

İspat: $\forall u(t,x)\in B^{3,2}_{2,2,T}$ fonksiyonu için V(t,x) fonksiyonuna bağlı aşağıdaki A_u operatörünü tanımlayalım:

$$A_u(V(t,x)) = W(t,x)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_s^3}\int_0^t\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\xi)P_i(u(\tau,\xi),V(\tau,\xi)).\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\upsilon_s(\xi)}{\lambda_s}\right)+\right.$$
$$\left.a(\xi)F\left[\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi)\right].\frac{\upsilon_s(\xi)}{\lambda_s}\right\}.$$
$$.\left\{1-e^{-\lambda_s^2(t-\tau)}\right\}d\xi d\tau.\upsilon_s(x),$$

burada,

$$W(t,x)=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\varphi_s+\frac{1}{\lambda_s^2}\left[1-e^{-\lambda_s^2 t}\right]\psi_s\right\}.\upsilon_s(x),$$

$$P_i(u(\tau,\xi),V(\tau,\xi)) = F_{\xi_i}\left[\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi)\right]+$$
$$+F_u\left[\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi)\right].V_{\xi_i}(\tau,\xi)+$$
$$+F_{u_\tau}\left[\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi)\right].V_{\tau\xi_i}(\tau,\xi)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}F_{u_{\xi_j}}\left[\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi)\right].V_{\xi_i\xi_j}(\tau,\xi)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n} F_{u_{\tau\xi_j}}\left[\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi)\right].V_{\tau\xi_i\xi_j}(\tau,\xi)+$$

$$+\sum_{j,k=1}^{n} F_{u_{\xi_j\xi_k}}\left[\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi)\right].V_{\xi_i\xi_j\xi_k}(\tau,\xi),$$

$i=1,2,\ldots,n$ dir.

Sobolev'in dahil etme teoremlerinden, Ladıjenskaya'nın [1] çalışmasındaki eşitsizliklerden (sayfa 84'te (18) ve sayfa 88'de (2.1) eşitlikleri), $B^{3,2}_{2,2,T}$ uzayının özelliklerinden ve teoremin koşullarından yararlanırsak A_u operatörünün $B^{3,2}_{2,2,T}$ uzayında bir operatör olduğunu gösterebiliriz. Schauder sabit nokta teoreminden (sabit nokta testinden) yararlanarak T'nin yeteri kadar küçük değerleri için A_u operatörünün $B^{3,2}_{2,2,T}$ uzayında en az bir u*(t,x) sabit noktasının varlığını kanıtlayabiliriz:

$$u^*=A_{u^*}(u^*)$$

Bulunan u*(t,x) fonksiyonunun (1)-(3) probleminin hemen hemen her yerde çözümü olduğu kanıtlandıktan sonra bu çözümün tekliği de Teorem 1'de belirttiğimiz yöntemle ispatlanabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Ladıjenskaya O.A., Hiperbolik denklem için karışık problem; İzd. Gostehizdat, (Rusca), Moskova, (1953).
2. Webb G.F., Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation.-Can. J.Math., 32, no:3, pp 631-643, (1980).
3. Şarifov T.A., Bir sınıf 3. mertebeden kısmi türevli lineer olmayan diferensiyel denklemler için bir boyutlu karışık problemin incelenmesi, Doktora tezi, (Rusca), Bakü, (1985).
4. Khudaverdiyev K.İ., Aliyev S.C., Sağ tarafında lineer olmayan operatörü bulunduran üçüncü mertebe diferensiyel denklem için çok boyutlu karışık problemin incelenmesi, Bakü Devlet Üniversitesi Yayınları, (Rusca), 3 – 7 sf, (1990).
5. Khudaverdiyev K.İ., İsmailov A.İ., Bir sınıf üçüncü mertebe lineer olmayan diferensiyel denklemin klasik çözümünün incelenmesi, Odlar Yurdu Üniversitesi Yayınları, Bakü, (Rusca), No:2, 67 – 70 sf, (1999).
6. Khudaverdiyev K.İ., Hüseynova N.R., Bir sınıf üçüncü mertebe lineer olmayan diferensiyel denklemin hemen hemen her yerde çözümünün incelenmesi, Bakü Devlet Üniversitesi Yayınları, (Rusca), 85 – 88 sf, (2002).
7. Aliyev S.C., Bir sınıf 3. mertebeden kısmi türevli lineer olmayan diferensiyel denklemler için çok boyutlu karışık problemin incelenmesi, Doktora tezi, (Rusca), Bakü, (1987).