

KONSOL KİRİŞLERDE SICAKLIK DAĞILIMININ YER DEĞİŞTİRMELER ÜZERİNDEKİ ETKİSİ

İbrahim EREN

Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü
İSTANBUL

ÖZET

Bu çalışmada, doğrusal sıcaklık değişimi etkisindeki konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler incelenmiştir. Kirişin Euler-Bernoulli eğrilik eşitliğinde doğrusallaştırma yapılmayıp geometrik doğrusal olmama durumu için hesaplar yapılmıştır. Sıcaklıkla şekil değiştirme katsayısı değişken alınarak, sıcaklık çarpanı ve yükseklik oranına göre kabul ettiğimiz boyutsuz katsayının farklı değerleri için yatay ve serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmeler Runge-Kutta yöntemini kullanarak hesaplanmış ve farklı boyutsuz katsayılar için kıyaslamalı tablo halinde verilmiştir. Sıcaklığın , kesit yüksekliğinin ve sıcaklıkla şekil değiştirme katsayısının değişiminin yer değiştirmeler üzerindeki etkisi gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Büyük Yer Değiştirmeler, Geometrik Doğrusal Olmama, Kirişlerde Sıcaklık Etkisi

TEMPERATURE EFFECTS ON LARGE DEFLECTIONS IN CANTILEVER BEAMS

ABSTRACT

In this study, large deflection of cantilever beams, subject to linear thermal load, is investigated. Euler-Bernoulli curvature equation of beam is taken nonlinear as real situation. Coefficient of thermal expansion is assumed to be variable. Horizontal and vertical deflection at the free end is calculated with Runge-Kutta method for different values of the non-dimensional coefficient which include the initial temperature and height. The results are shown with table for different non-dimensional coefficient. The effect of temperature, height and coefficient of thermal expansion is shown on the deflection.

Key Words: Large Deflections, Geometrical Non-linearity, Temperature effect of beams

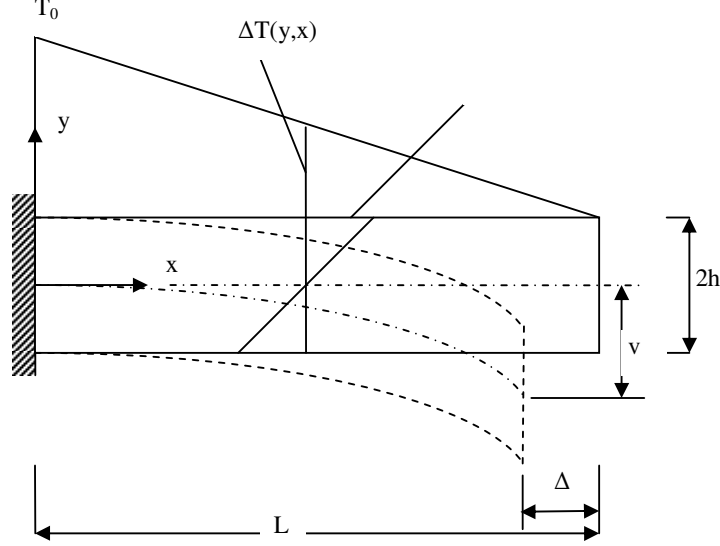
1.GİRİŞ

Elastik kirişlerde, yük altında ve sıcaklık değişimlerinde büyük yer değiştirmeler oluşabilmektedir. Büyük yer değiştirmelerden dolayı da doğrusal olmama durumu söz konusudur. Bunun için büyük yer değiştirmelere maruz kirişlerde problemler, doğrusal olmayan eğilme teorisine göre çözümlenmelidir. Bernoulli-Euler yasasında elastik eğrinin gerçek eğrilik ifadesi kullanılmalıdır. Üniform ve üniform olmayan, tekil ve yayılı yüklü doğrusal elastik konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler, bir çok çalışmada incelenmiştir [1-8]. Lineer elastik kirişlerdeki büyük yer değiştirme konusundaki farklı problemlerde uygulanan yöntem ve sayısal örnekler için Fertis'in [9] kitabında ayrıntılı bilgi bulunabilir. Yin ve Wang [10], uç noktalarından farklı bağlantı şekillerine sahip çelik kirişlerdeki sıcaklık artışının yer değiştirmeler üzerindeki etkisini sayısal bir örnekle göstermişlerdir. Li ve Song [11], Enine kesit üzerindeki üniform olmayan sıcaklık artışının, Timoshenko kirişlerinde termal büyük yer değiştirmeler üzerindeki etkisini incelemişlerdir.

2.DOĞRUSAL SICAKLIK DEĞİŞİMİ ETKİSİNDEKİ KONSOL KİRİŞ

Bir konsol kiriş üzerindeki sıcaklık dağılımı, Şekil 1'deki gibi doğrusal olarak alınarak, sıcaklıkla şekil değiştirme katsayısının da kiriş boyunca değişken (doğrusal veya doğrusal olmayan) olarak kabul edildiği bir sistemde, sıcaklık değişiminin yer değiştirmeler üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bunu yaparken yalnızca geometrik doğrusal olmama durumu göz önünde bulundurulmuştur. Kirişin boyundaki şekil değişimi ihmal edilmiştir.

Şekil 1'de; ΔT , sıcaklık değişimi, T_0 , başlangıç noktasındaki sıcaklık, L , kiriş boyu, h , kiriş yüksekliği, Δ , yatay yer değiştirme, v , serbest uç noktadaki düşey yer değiştirme olarak alınmıştır.



Şekil 1. Doğrusal sıcaklık dağılımı etkisindeki konsol kirişlerdeki yer değiştirmeler

3. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ VE FORMÜLASYON

Kiriş üzerindeki sıcaklık dağılımı, genelde mekanik kitaplarında sıklıkla rastlanıldığı gibi aşağıdaki şekilde alınmıştır.

$$\Delta T = T_0 \frac{y(L-x)}{hL} \quad (1)$$

α , sıcaklıkla şekil değiştirme katsayısı, α_0 , başlangıç noktasındaki sıcaklıkla şekil değiştirme katsayısı, k ve m ise α eğrisinin değişkenliğini sağlayan parametreler olmak üzere α , aşağıdaki gibi kabul edilmiştir.

$$\alpha = \alpha_0 \left(1 - k \left(\frac{x}{L}\right)^m\right) \quad (2)$$

Yukarıdaki denklemde k , katsayısı 0 ile 1 arasında alınmıştır. (2) denkleminde de görüleceği gibi m katsayısı 1 olduğunda α , doğrusaldır. $m \neq 1$ ise doğrusal olmayan α eğrileri oluşmaktadır. Sıcaklık ve eğriliğe bağlı olarak birim şekil değiştirme,

$$\varepsilon = \kappa y = \alpha \Delta T \quad (3)$$

olur. Burada ε , birim şekil değiştirme, κ , eğriliktir.

(1)-(3) denkleminde eğrilik aşağıdaki gibi çıkarılır.

$$\kappa = -\frac{T_0(L-x)(-1+k(\frac{x}{L})^m)\alpha_0}{hL} \quad (4)$$

$$\kappa = \frac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}, [9] \quad (5)$$

Doğrusal olmayan Euler-Bernoulli eğrilik ifadesi yukarıdaki gibi alınıp, eşitliğin her iki tarafı integre edildiğinde;

$$\int \kappa dx + C_1 = \frac{y'(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

ifadesi çıkarılır.

$$\int \kappa dx + C_1 = G \quad (7)$$

olarak tanımlandığında,

$$y'(x) = \frac{G}{(1-(G)^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

olur.

(4) ve (6) denkleminde $x = 0$ için $y'(0) = 0$ şeklindeki sınır şartı kullanıldığında, C_1 integrasyon sabitinin sıfır olduğu görülür. Böylece (4) denklemindeki eğrilik ifadesi integrale edilerek, (7) eşitliğinden aşağıdaki denklem (9) elde edilir:

$$\int k dx + C_1 = -\frac{T_0 x (-2L + x + 2k \left(\frac{x}{L}\right)^m \left(\frac{L}{1+m} - \frac{x}{2+m}\right)) \alpha_0}{2hL} \quad (9)$$

Şeklinde yazılabilen G ifadesi,

$$\frac{x}{L} = \dot{x}, \quad \frac{h}{L} = \dot{h} \quad (10)$$

yukarıdaki boyutsuzlaştırma işlemleri yapıldığında aşağıdaki gibidir:

$$G = -\frac{\frac{T_0 \alpha_0 \dot{x}}{\dot{h}} \left(-2 + \dot{x} + 2k(\dot{x})^m \left(\frac{1}{1+m} - \frac{\dot{x}}{2+m}\right)\right)}{2} \quad (11)$$

Yukarıdaki denklem $\frac{T_0 \alpha_0}{\dot{h}}$ şeklinde yazılabilen boyutsuz bir büyüklüğe bağlı olarak ifade edilmiştir.

$$\int_0^{(L-\Delta)} \sqrt{1 + (y'(x))^2} = L \quad (12)$$

Şeklinde yazılabilen yay uzunluğu denklemini, Simpson'un 3 te 1 kuralını kullanarak integrale ettiğimizde, yatay yer değiştirmeler bulunur.

$$\frac{\Delta}{L} = \delta_h, \quad \frac{v}{L} = \delta_v \quad (13)$$

şeklinde boyutsuzlaştırma işlemleri yapılır, (8) ve (11) denklemleri, yukarıda bahsedilen Δ , yatay yer değiştirmeler ve $y(0) = 0$ sınır şartından faydalansın, Runge-Kutta yöntemini kullanarak, $y(x)$ enterpolasyon

fonksiyonu, bu fonksiyonda, $y(L-\Delta)$ 'yı hesaplayarak ta serbest uç noktadaki düşey yer değiştirme değeri bulunur.

4. SAYISAL SONUÇLAR

$\frac{T_0\alpha_0}{h}$ 'nın değişimine bağlı olarak farklı k ve m değerleri için konsol kirişte

oluşan yatay ve düşey büyük yer değiştirmeler, Çizelge 1-3'de verilmiştir.

Çizelge 1. m = 0,5 için konsol kirişte oluşan büyük yer değiştirmeler

$\frac{T_0\alpha_0}{h}$	δ	m = 0,5				
		k				
		0	0,25	0,5	0,75	1
0,01	δ_h	$6,66 \times 10^{-6}$	$5,167 \times 10^{-6}$	$3,862 \times 10^{-6}$	$2,751 \times 10^{-6}$	$1,835 \times 10^{-6}$
	δ_v	0,0033	0,0029	0,0025	0,0021	0,0018
0,05	δ_h	$166,6 \times 10^{-6}$	$129,1 \times 10^{-6}$	$96,5 \times 10^{-6}$	$68,7 \times 10^{-6}$	$45,8 \times 10^{-6}$
	δ_v	0,0166	0,0147	0,0128	0,0109	0,009
0,1	δ_h	$666,8 \times 10^{-6}$	$516,7 \times 10^{-6}$	$386,2 \times 10^{-6}$	$275,1 \times 10^{-6}$	$183,5 \times 10^{-6}$
	δ_v	0,0333	0,0295	0,0257	0,0219	0,018
0,5	δ_h	0,0167	0,0129	0,0096	0,0068	0,0045
	δ_v	0,166	0,1472	0,1283	0,1094	0,0904
1	δ_h	0,067	0,0524	0,039	0,0277	0,0184
	δ_v	0,3281	0,2919	0,2552	0,218	0,1805
2	δ_h	0,282	0,2174	0,1613	0,1141	0,0755
	δ_v	0,6141	0,5584	0,4962	0,4291	0,3584

Çizelge 2. $m = 1$ için konsol kirişte oluşan büyük yer değiştirmeler

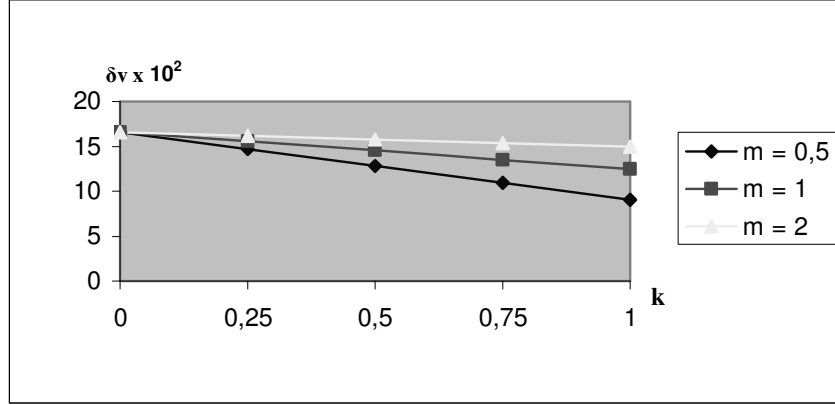
$\frac{T_0 \alpha_0}{\dot{h}}$	δ	$m = 1$				
		k				
		0	0,25	0,5	0,75	1
0,01	δ_h	$6,66 \times 10^{-6}$	$5,796 \times 10^{-6}$	$4,99 \times 10^{-6}$	$4,248 \times 10^{-6}$	$3,571 \times 10^{-6}$
	δ_v	0,0033	0,0031	0,0029	0,0027	0,0025
0,05	δ_h	$166,6 \times 10^{-6}$	$144,9 \times 10^{-6}$	$124,7 \times 10^{-6}$	$106,2 \times 10^{-6}$	$89,2 \times 10^{-6}$
	δ_v	0,0166	0,0156	0,0145	0,0135	0,0124
0,1	δ_h	$666,8 \times 10^{-6}$	$579,7 \times 10^{-6}$	$499,1 \times 10^{-6}$	$424,9 \times 10^{-6}$	$357,2 \times 10^{-6}$
	δ_v	0,0333	0,0312	0,0291	0,027	0,0249
0,5	δ_h	0,0167	0,0145	0,01252	0,0106	0,0089
	δ_v	0,166	0,1557	0,1454	0,1351	0,1248
1	δ_h	0,067	0,0589	0,0506	0,0431	0,0362
	δ_v	0,3281	0,3085	0,2888	0,2688	0,2487
2	δ_h	0,282	0,2456	0,2116	0,1801	0,1513
	δ_v	0,6141	0,5862	0,5557	0,523	0,4883

Çizelge 3. $m = 2$ için konsol kirişte oluşan büyük yer değiştirmeler

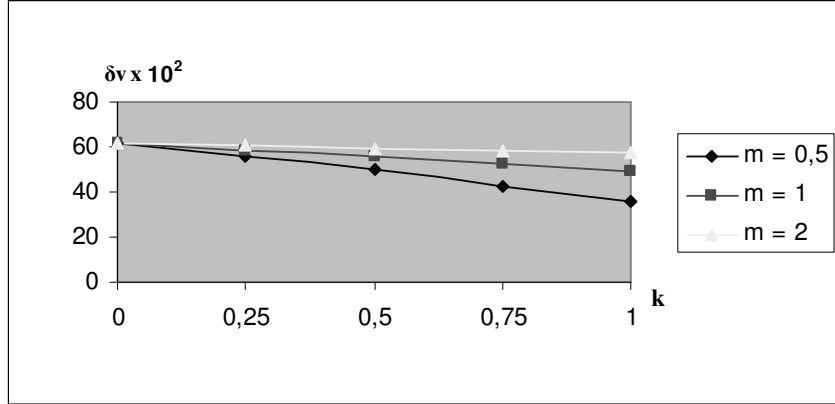
$\frac{T_0 \alpha_0}{h}$	δ	m = 2				
		k				
		0	0,25	0,5	0,75	1
0,01	δ_h	$6,66 \times 10^{-6}$	$6,296 \times 10^{-6}$	$5,937 \times 10^{-6}$	$5,591 \times 10^{-6}$	$5,258 \times 10^{-6}$
	δ_v	0,0033	0,0032	0,0031	0,003	0,003
0,05	δ_h	$166,6 \times 10^{-6}$	$157,4 \times 10^{-6}$	$148,4 \times 10^{-6}$	$139,8 \times 10^{-6}$	$131,4 \times 10^{-6}$
	δ_v	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0149
0,1	δ_h	$666,8 \times 10^{-6}$	$629,7 \times 10^{-6}$	$593,8 \times 10^{-6}$	$559,2 \times 10^{-6}$	$525,9 \times 10^{-6}$
	δ_v	0,0333	0,0324	0,0316	0,0308	0,0299
0,5	δ_h	0,0167	0,0158	0,0149	0,014	0,0132
	δ_v	0,166	0,1619	0,1578	0,1537	0,1496
1	δ_h	0,067	0,064	0,0604	0,0569	0,0536
	δ_v	0,3281	0,3205	0,3128	0,3051	0,2974
2	δ_h	0,282	0,268	0,2543	0,2409	0,2277
	δ_v	0,6141	0,6047	0,5949	0,5845	0,5736

Yer değiştirme büyüklüklerinin, k, m ve $\frac{T_0 \alpha_0}{h}$ gibi üç farklı parametreye bağlı olmasından dolayı, yukarıda tablolar halinde verilen yer değiştirme büyüklüklerinin grafik gösterimi, oldukça zordur. Fikir vermesi açısından iki farklı $\frac{T_0 \alpha_0}{h}$ değeri için hesaplanan düşey yer değiştirme değerleri şekillerle gösterilmiştir. Şekillerde en çok göze çarpan üstel 'm' katsayısının

artmasıyla eğim artmakta, yani m arttıkça 'k' nin artmasıyla düşey yer değiştirme değişimi, daha fazla olmaktadır.



Şekil 1. $\frac{T_0 \alpha_0}{h} = 0,5$ için 'k' parametresine bağlı olarak düşey yer değiştirmelerin gösterimi



Şekil 2. $\frac{T_0 \alpha_0}{h} = 2$ için 'k' parametresine bağlı olarak düşey yer değiştirmelerin gösterimi

5. SONUÇLAR

Literatürde daha çok kuvvet veya moment etkisindeki kirişlerdeki büyük yer değiştirme problemleri ile ilgili çalışmalara rastlanmaktadır. Sıcaklık etkisinin incelendiği problemlere fazla rastlanmamaktadır. Halbuki ani veya kısmi sıcaklık değişimlerini yaşanabildiği sistemlerde, sıcaklıkla şekil değiştirme katsayısının da büyüklüğüne bağlı olarak, büyük yer değiştirmeler oluşabilecektir. Bu çalışmada, sıcaklık etkisinin büyük yer değiştirmeler üzerindeki etkisi incelenerek farklı bir açılım sağlanmıştır. Bu konuda yapılan çalışmaların azlığı nedeniyle sayısal sonuçları herhangi bir referans çalışmayla karşılaştırmak mümkün olmamıştır. Ancak kullanılan metodun, daha önce kirişlerde büyük yer değiştirme problemleri ile ilgili yapılan ve referans olarak kullanılan bir çok çalışma ile aynı olması, sonuçların güvenilirliği konusunda bir ölçüt olmaktadır. Bu çalışma, yalnızca doğrusal olmayan geometrik koşullara göre kabul edilen parametreler cinsinden büyük yer değiştirmeleri hesaplama ve kıyaslama imkanı vermekte, doğrusallaştırma yapıldığında denklemler bu parametreler cinsinden ifade edilememektedir. Dolayısıyla doğrusal kabullerle oluşan yer değiştirmelerin hesaplanma gayesi yoktur.

$\frac{T_0\alpha_0}{h}$ boyutsuz büyüklüğündeki $T_0\alpha_0$, sıcaklık çarpanı kesit yüksekliğine göre arttıkça yatay ve düşey yer değiştirme büyüklüklerinde artma olmaktadır. Farklı 'k' katsayıları için 'm' değeri arttıkça, yatay ve düşey yer değiştirme değerleri de artmaktadır. Her bir 'm' değeri için artan k değerleri, beklenildiği gibi yatay ve düşey yer değiştirmelerin azalmasına sebep olmaktadır. Çalışmada yer değiştirme büyüklüklerinin $\frac{T_0\alpha_0}{h}$ gibi sıcaklık çarpanı ve boyutsuz kesit yüksekliğine bağlı olarak ifade edilebilmesiyle, sayısal örnekler yerine genel bir çözüm sağlamıştır. Ayrıca gerçek eğrilik denkleminin kullanımıyla, geometrik doğrusallaştırmanın meydana getireceği hatalarda yapılmamıştır. Daha farklı sıcaklık dağılımı ve bağlantı koşulları için ve farklı kiriş türlerinde hesaplamalar yapılarak, konuyla ilgili çalışmalar genişletilebilir.

KAYNAKLAR

1. Bisshopp, K. E. and Drucker, D.C., Large Deflections of Cantilever Beams, *Q. Appl. Math.*,3: 272-275, (1945).

2. Scott, E. J. Carver, D. R. and Kan M., On the Linear Differential Equation for Beam Deflection, *J. Appl. Mech.*, 22: 245-248, (1955).
3. Lau, J. H., Large Deflections of Beams with Combined Loads, *J. Eng. Mech.*, 108: 180-185, (1982).
4. Rao, B. N. and Rao, G. V., On the Large Deflection of Cantilever Beams with End Rotational Load, *Z. Angew-Math. Mech.*, 66: 507-509, (1986).
5. Baker, G., On the Large Deflections of Non- prismatic Cantilevers with a Finite Depth, *Comput. Struct.*, 46: 365-370, (1993).
6. Lee, B. K., Wilson, J.F. and Oh, S.J., Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross Sections, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 28: 579-589, (1993).
7. Frisch-Fay, R., *Flexible Bars*, Butter Worths, London, (1962).
8. Eren, İ., Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler Üzerine Bazı Yeni Çözümler, Doktora Tezi, YTÜ. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, (2006)
9. Fertis, D. G. (1999). *Nonlinear Mechanics*, CRC Pres, New York.
10. Yin, Y.Z., Wang, Y.C., A Numerical Study of Large Deflection Behaviour of Restrained Steel Beams at Elevated Temperatures. *Journal of Constructional Steel Research*, 60: 1029-1047, (2004).
11. Li, S., Song, X., Large Thermal Deflections of Timoshenko beams under transversely non-uniform temperature rise. *Mechanics Research Communications*, 33: 84-92, (2006).

