KATSAYILARI LEBESGUE İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYONLAR OLAN ADİ DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİ ÜZERİNE

Alp Arslan Kıraç

Pamukkale Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak.,
Matematik Böl., 20070 Kınıklı / DENİZLİ.

ÖZET

Bu makalede, $p_2(x)$, $p_3(x)$ şeklinde Lebesgue integrallenebilen kompleks değerli katsayılara sahip

$$\ell(y) = y''' + p_2(x)y' + p_3(x)y$$

diferansiyel ifadesi ve t-periyodik sınır koşulları tarafından, $L_2[0,1]$'de üretilen $L(p)$ diferansiyel operatörü ele alındı. $L(p)$ operatörünün özdeğerleri için asimptotik formüller elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Self-adjoint olmayan operatörler, t-periyodik sınır koşulları, Asimptotik formüller.

ON THE EIGENVALUES OF THE ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS WHEN ITS COEFFICIENTS ARE LEBESGUE INTEGRABLE FUNCTIONS

ABSTRACT

In this article, we consider an operator $L(p)$ generated by differential expression

$$\ell(y) = y''' + p_2(x)y' + p_3(x)y,$$

in $L_2[0,1]$ and t-periodic boundary conditions, where $p_2(x), p_3(x)$ are complex-valued functions in $L_1[0,1]$. we obtain the asymptotic formulas for the eigenvalues of the differential operator $L(p)$.

Key Words: Non-selfadjoint operators, t-periodic boundary conditions, Asymptotic formulas.

1. GİRİŞ

[0,1] kapalı aralığında kompleks değerli ve Lebesgue integrallenebilen $p_2(x),\ p_3(x)$ şeklinde katsayılara sahip

$$\ell(y) = y''' + p_2(x)y' + p_3(x)y \qquad (1)$$

diferansiyel denklemi ve t sabit bir kompleks parametre olmak üzere

$$y^{(v)}(1) = e^{it} y^{(v)}(0) \ , \quad v = 0,1,2 \qquad (2)$$

t -periodik sınır koşulları ([1]) tarafından, $L_2[0,1]$'de üretilen $L(p)$ diferansiyel operatörünü gözönüne alalım.

[2,3,4]'te özdeğerlere asimptotik formülleri verebilmek için kullanılan metod; $\ell(y) = \lambda y$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri ve onların türevlerinin karakteristik determinantta yerine yazılmasına bağlı olduğundan, $L(p)$ operatörünün k'ıncı özdeğerleri için $O(k)$'ıncı mertebeden daha iyi asimptotik formüller verilebilmesi, (1) denklemindeki $p_2(x),\ p_3(x)$ katsayıları üzerine koyulan sürekli türevlenebilme şartına bağlıdır.

Bu makalede, (1) denkleminin $p_2(x)$, $p_3(x)$ katsayıları, $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde kompleks değerli Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar olduğunda, $L(p)$ operatörünün k'ıncı özdeğerleri için $O(k(\ln|k|/k)^2)$ mertebeden asimptotik formüller elde edildi. Sonuç olarak; (1) denkleminin katsayıları için herhangi bir sürekli türevlenebilme şartı yoktur.

2. ÖZDEĞERLER İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

(1) denkleminin derecesi tek olduğundan dolayı, her t için (2) sınır koşulları regülerdir ve $L(p)$ operatörünün yeterince büyük özdeğerlerinin katlılığı birdir (simple), ([4, sf. 64]). Buradan, [5, 6] göz önüne alınacak olursa, $|k| \ge N$ için $L(p)$ operatörünün $\{\lambda_k(t) : k \in Z\}$ özdeğerleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\lambda_k(t) = (2k\pi i + it)^3 + O(k) \qquad (3)$$

Burada, N yeterince büyük bir tamsayıyı ifade eder. (3) formülündeki $L(p)$'nin $\lambda_k(t)$ özdeğerinin asıl önemli kısmı olan $(2k\pi i + it)^3$'ün, $L(0)$ ($p_2(x) = p_3(x) = 0$ *için*) operatörünün $e^{(2k\pi i + it)x}$ özvektörüne karşılık gelen özdeğeri olduğu kolayca görülebilir. Yani, $|k| \ge N$ ise $L(p)$'nin $\lambda_k(t)$ özdeğeri için aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\left|\lambda_k(t)-(2k\pi i+it)^3\right|<c_1|k|, \tag{4}$$

$$\left|\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^3\right|$$
$$>c_2\left|\,|2\pi i(k-k_1)+it|-|2k\pi i+it|\,\right|\left(|2\pi i(k-k_1)+it|^2+|2k\pi i+it|^2\right) \tag{5}$$

Burada $k_1 \in Z/\{0\}$ ve c_m, $m=1,2,...,$ N 'den bağımsız pozitif sabitlerdir. (4) ve (5)'e ilave olarak, ileride ispatlanan lemmada özellikle kullanılan, aşağıdaki eşitsizlik verilebilir:

$$\left|\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^3\right|$$
$$>c_3\left|\,|2\pi i(k-k_1)+it|-|2k\pi i+it|\,\right|\left|\,|2\pi i(k-k_1)+it|^2\right|>c_4|k_1|^3 \tag{6}$$

Burada, $|k|\geq N$ için $|k_1|>3|k|$ $\left(yani\ |k-k_1|>2|k|\right)$. (4) ve (5) kullanılarak aşağıdaki bağıntıların gösterilmesi zor değildir [7]:

$$\sum_{k_1:k_1\neq 0}\frac{|2\pi i(k-k_1)+it|}{\left|\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^3\right|}=O\left(\frac{\ln|k|}{k}\right), \tag{7}$$

$$\sum_{k_1:k_1\neq 0}\frac{|k|^2}{\left|\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^3\right|^2}=O\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{8}$$

Burada $|k|\geq N$. $\psi_{k,t}(x)$ birim özvektörlere karşılık gelen, $L(p)$ operatörünün $\lambda_k(t)$ özdeğerlerine asimptotik formülleri elde etmek için aşağıdaki bağıntıyı gözönüne alalım:

$$(\lambda_k(t)-(2k\pi i+it)^3)(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x})$$
$$=(p_2(x)\psi'_{k,t}(x)+p_3(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}) \tag{9}$$

Burada, $(.,.)$, $L_2[0,1]$ uzayındaki iç çarpımı ifade eder.

$$\psi'''_{k,t}(x)+p_2(x)\psi'_{k,t}(x)+p_3(x)\psi_{k,t}(x)=\lambda_k(t)\psi_{k,t}(x)$$

eşitliğinin her iki tarafı $e^{-(2k\pi i+it)x}$ ile çarpılır ve $L(0)e^{(2k\pi i+it)x}=(2k\pi i+it)^3e^{(2k\pi i+it)x}$ kullanılırsa, (9) bağıntısının elde edildiği görülür.

Lemma 2.1. $|k| \geq N$ için $p_2(x)$ ve $p_3(x)$ Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere;

$$\left(p_2(x)\psi'_{k,t}(x) + p_3(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i + i\bar{t})x} \right)$$
$$= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} p_{2,k_1} \left(\psi'_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x} \right) +$$
$$\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} p_{3,k_1} \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x} \right) \tag{10}$$

elde edilir. Burada, $p_{s,k} = (p_s(x), e^{i2\pi k x})$, $s = 2,3$. Ayrıca;

$$\left| \left(p_2(x)\psi'_{k,t}(x) + p_3(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2n\pi i + i\bar{t})x} \right) \right| < c_5 |k|, \qquad \forall n \in Z. \tag{11}$$

İspat: İlk olarak $|k| \geq N$ için (10) eşitliğini ispatlayalım. $\psi'_{k,t}(x)$ ve $\psi_{k,t}(x)$ fonksiyonları [0,1] kapalı aralığı üzerinde sınırlı olduğundan, Lebesgue integrallenebilen $p_2(x)$ ve $p_3(x)$ fonksiyonları için $p_2(x)\psi'_{k,t}(x) + p_3(x)\psi_{k,t}(x) \in L_1[0,1]$ olduğu açıktır. Buradan,

$$\left(p_2(x)\psi'_{k,t}(x) + p_3(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x} \right) \to 0, \ |k_1| \to \infty \tag{12}$$

olduğu görülür. Böylece, aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde bir $C(k)$ pozitif sabiti ve k_0 tamsayısı vardır:

$$\max_{k_1 \in Z} \left| \left(p_2(x)\psi'_{k,t}(x) + p_3(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x} \right) \right|$$
$$= \left| \left(p_2(x)\psi'_{k,t}(x) + p_3(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2k_0\pi i + i\bar{t})x} \right) \right| = C(k) \tag{13}$$

Buradan, (9) göz önüne alınacak olursa,

$$\left| \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x} \right) \right| \leq \frac{C(k)}{\left| \lambda_k(t) - (2\pi i(k-k_1) + it)^3 \right|} \tag{14}$$

eşitsizliği elde edilir. (14) ve (6) eşitsizliklerinden

$$\sum_{k_1:|k_1|>3k_2}\left|\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)\right| < \frac{c_6}{k_2^2} \tag{15}$$

elde edilir. Burada, $k_2 > |k|$ ve $|k_1| > 3k_2 > 3|k|$ (yani, $|k-k_1| > 2|k|$) şeklindedir. Böylece, $\psi_{k,t}(x)$ fonksiyonu için $\{e^{(2\pi i(k-k_1)+it)x} : k_1 \in Z\}$ bazı tarafından üretilen aşağıdaki toplam elde edilir:

$$\psi_{k,t}(x) = \sum_{k_1:|k_1|\le 3k_2}\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)e^{(2\pi i(k-k_1)+it)x} + g_0(x). \tag{16}$$

Burada, $\sup\limits_{x\in[0,1]}|g_0(x)| < \dfrac{c_6}{k_2^2}$.

(14) eşitsizliğinin her iki yanı $|2\pi i(k-k_1)+it|$ ile çarpıldıktan sonra, kısmi integrasyon ve (2) sınır koşulları kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$\left|\left(\psi'_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)\right| \le \frac{|2\pi i(k-k_1)+it|C(k)}{\left|\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^3\right|} \tag{17}$$

Benzer şekilde, (6) eşitsizliği kullanılarak, $\psi'_{k,t}(x)$ fonksiyonu için $\{e^{(2\pi i(k-k_1)+it)x} : k_1 \in Z\}$ bazı tarafından üretilen aşağıdaki toplam elde edilir:

$$\psi'_{k,t}(x) = \sum_{k_1:|k_1|\le 3k_2}\left(\psi'_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)e^{(2\pi i(k-k_1)+it)x} + g_1(x). \tag{18}$$

Burada, $\sup\limits_{x\in[0,1]}|g_1(x)| < \dfrac{c_6}{k_2}$

$\psi_{k,t}(x)$ ve $\psi'_{k,t}(x)$ için elde edilen bu toplamlar

$\left(p_2(x)\psi'_{k,t}(x) + p_3(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)$ integralinde yerine konulur ve

k_2, ∞ 'a götürülürse (10) elde edilir.

(13)'de bulunan $C(k)$ eşitliği, (10) bağıntısı ve kısmi integrasyon kullanılarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$C(k) = \left|\left(p_2(x)\psi'_{k,t}(x) + p_3(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2k_0\pi i+i\bar{t})x}\right)\right|$$

$$= \left| \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \left(p_{2,k_1}[2\pi i(k_0-k_1)+it] + p_{3,k_1} \right) \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k_0-k_1)+i\bar{t})x} \right) \right| \tag{19}$$

Şimdi (19)'daki $\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x} \right)$ çarpanını içeren terim ayıklanır ($k_0 - k_1 = k$ için) ve (9) kullanılırsa,

$$C(k) = \left| \sum_{k_1:k_0-k_1\neq k} \frac{\left(p_{2,k_1}[2\pi i(k_0-k_1)+it] + p_{3,k_1} \right)}{\lambda_k(t) - (2\pi i(k_0-k_1)+it)^3} \times \right.$$

$$\left(p_2(x)\psi'_{k,t}(x) + p_3(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k_0-k_1)+i\bar{t})x} \right) +$$

$$\left. \left(p_{2,k_0-k}[2k\pi i+it] + p_{3,k_0-k} \right) \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x} \right) \right|$$

$$\leq \sum_{k_1:k_0-k_1\neq k} \frac{\left| \left(p_{2,k_1}[2\pi i(k_0-k_1)+it] + p_{3,k_1} \right) \right| C(k)}{\left| \lambda_k(t) - (2\pi i(k_0-k_1)+it)^3 \right|} + c_8|k| \tag{20}$$

elde edilir. Buradan (7) bağıntısı kullanılarak,

$$\sum_{k_1:k_0-k_1\neq k} \frac{\left| \left(p_{2,k_1}[2\pi i(k_0-k_1)+it] + p_{3,k_1} \right) \right| C(k)}{\left| \lambda_k(t) - (2\pi i(k_0-k_1)+it)^3 \right|} = C(k)\, O\left(\frac{\ln|k|}{k} \right) \tag{21}$$

bulunur. Sonuç olarak; (20) ve (21)'den $C(k) < \frac{C(k)}{2} + c_8|k|$ bağıntısı, $C(k) < c_5|k|$ eşitsizliğini gerektirir. (11) elde edilir.

(10) eşitliği göz önüne alınır ve kısmi integrasyon kullanılırsa (9) bağıntısı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\left(\lambda_k(t) - (2k\pi i+it)^3 \right) \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x} \right)$$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \left(p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1)+it] + p_{3,k_1} \right) \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x} \right) \tag{22}$$

(22)'nin sağındaki toplamda, $\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x} \right)$ çarpanını içeren terim ayıklanır ($k_1 = 0$ için) ve geriye kalan terimlerde $\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x} \right)$ ifadesi için k yerine $(k-k_1)$ alınarak (9) kullanılırsa,

$$\left(\lambda_k(t) - (2k\pi i + it)^3\right)\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x} \right)$$
$$= \left(p_{2,0}[2k\pi i + it] + p_{3,0}\right)\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x} \right) +$$
$$\sum_{k_1 : k_1 \neq 0} \frac{\left(p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1) + it] + p_{3,k_1}\right)\left(p_2(x)\psi'_{k,t}(x) + p_3(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x} \right)}{\lambda_k(t) - (2\pi i(k-k_1) + it)^3}$$

(23)

bulunur. (23)'ün sağındaki son toplamda, (10) bağıntısı k_2 indeksine göre gözönüne alınırsa,

$$\left(\lambda_k(t) - (2k\pi i + it)^3\right)\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x} \right)$$
$$= \left(p_{2,0}[2k\pi i + it] + p_{3,0}\right)\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x} \right) +$$
$$\sum_{k_1, k_2 : k_1 \neq 0} \frac{\left(p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1) + it] + p_{3,k_1}\right)\left(p_{2,k_2}[2\pi i(k-k_1-k_2) + it] + p_{3,k_2}\right)}{\lambda_k(t) - (2\pi i(k-k_1) + it)^3}$$
$$\times \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1-k_2)+i\bar{t})x} \right) \qquad (24)$$

elde edilir.

Buradan (24)'ün sağındaki son toplamda $\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x} \right)$ çarpanını içeren terim ayıklanır ($k_1 + k_2 = 0$ için) ve $k_1 + k_2 \neq 0$ için $\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1-k_2)+i\bar{t})x} \right)$ ifadesi yerine, (9) eşitliği k yerine $k - k_1 - k_2$ alınarak kullanılırsa,

$$\left(\lambda_k(t) - (2k\pi i + it)^3\right)\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x} \right)$$

$$=\left(p_{2,0}[2k\pi i+it]+p_{3,0}\right)\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)$$

$$+\sum_{k_1:k_1\neq 0}\frac{\left(p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1)+it]+p_{3,k_1}\right)\left(p_{2,-k_1}[2k\pi i+it]+p_{3,-k_1}\right)}{\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^3}$$

$$\times\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)$$

$$+\sum_{\substack{k_1,k_2:k_1\neq 0\\ k_1+k_2\neq 0}}\frac{\left(p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1)+it]+p_{3,k_1}\right)\left(p_{2,k_2}[2\pi i(k-k_1-k_2)+it]+p_{3,k_2}\right)}{[\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^3]\,[\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1-k_2)+it)^3]}$$

$$\times\left(p_2(x)\psi'_{k,t}(x)+p_3(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1-k_2)+i\bar{t})x}\right) \qquad (25)$$

bulunur. Sonuç olarak; aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\left(\lambda_k(t)-(2k\pi i+it)^3\right)\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)$$

$$=\left((p_{2,0}[2k\pi i+it]+p_{3,0})+A(\lambda_k(t))\right)\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)+R(\lambda_k(t)) \qquad (26)$$

Burada,

$$A(\lambda_k(t))=\sum_{k_1:k_1\neq 0}\frac{\left(p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1)+it]+p_{3,k_1}\right)\left(p_{2,-k_1}[2k\pi i+it]+p_{3,-k_1}\right)}{\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^3}, \qquad (27)$$

$$R(\lambda_k(t))=$$

$$\sum_{\substack{k_1,k_2:k_1\neq 0\\ k_1+k_2\neq 0}}\frac{\left(p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1)+it]+p_{3,k_1}\right)\left(p_{2,k_2}[2\pi i(k-k_1-k_2)+it]+p_{3,k_2}\right)}{[\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^3]\,[\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1-k_2)+it)^3]}$$

$$\times\left(p_2(x)\psi'_{k,t}(x)+p_3(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1-k_2)+i\bar{t})x}\right) \qquad (28)$$

Ayrıca, aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığını görmek zor değildir:

$$\left|p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1)+it]+p_{3,k_1}\right|<c_9\left|2\pi i(k-k_1)+it\right|, \qquad (29)$$

$$\left|p_{2,k_2}[2\pi i(k-k_1-k_2)+it]+p_{3,k_2}\right|<c_9\left|2\pi i(k-k_1-k_2)+it\right| \qquad (30)$$

ve

$$\left| p_{2,-k_1}[2k\pi i + it] + p_{3,-k_1} \right| < c_{10}|k| \tag{31}$$

Buradan, (11), (29), (30), (31) eşitsizlikleri ve (7) bağıntısı kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$A(\lambda_k(t)) = O\left(k(\frac{\ln|k|}{k}) \right) = O(\ln|k|), \qquad R(\lambda_k(t)) = O\left(k(\frac{\ln|k|}{k})^2 \right) \tag{32}$$

Şimdi (26) ve (32) formüllerinden aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 2.2. $L(p)$ operatörünün $\lambda_k(t)$ özdeğerleri aşağıdaki formülleri sağlar:

$$\lambda_k(t) = (2k\pi i + it)^3 + \left(p_{2,0}[2k\pi i + it] + p_{3,0}\right) + O(\ln|k|), \tag{33}$$

$$\lambda_k(t) = (2k\pi i + it)^3 + \left(p_{2,0}[2k\pi i + it] + p_{3,0}\right) + $$
$$+ \sum_{k_1 : k_1 \neq 0} \frac{\left(p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1) + it] + p_{3,k_1}\right)\left(p_{2,-k_1}[2k\pi i + it] + p_{3,-k_1}\right)}{(2k\pi i + it)^3 - (2\pi i(k-k_1) + it)^3}$$
$$+ O\left(k(\frac{\ln|k|}{k})^2 \right) \tag{34}$$

İspat. (9), (11) ve (8) kullanılarak,

$$\sum_{k_1 \neq 0} \left| \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1) + i\bar{t})x} \right) \right|^2 < \sum_{k_1 \neq 0} \frac{c_{11}|k|^2}{\left| \lambda_k(t) - (2\pi i(k-k_1) + it)^3 \right|^2}$$
$$= O\left(\frac{1}{k^2} \right)$$

elde edilir.

Böylece, $\{e^{(2k\pi i + it)x} : k \in Z\}$ bazı tarafından üretilen, $\psi_{k,t}(x)$ birim özvektör aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\psi_{k,t}(x) = \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i + i\bar{t})x} \right) e^{(2k\pi i + it)x} + h(x), \tag{35}$$

$$\left| \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i + i\bar{t})x} \right) \right| = 1 + O\left(\frac{1}{k} \right) \tag{36}$$

Burada, $\|h(x)\| = O\left(\frac{1}{k}\right)$

Hemen burada (23)'ün her iki yanı $(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i + \bar{it})x})$ ile bölünür ve (32) kullanılırsa, (33) formülü ispatlanmış olur.

Benzer şekilde (26) eşitliğinin her iki yanı $(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i + \bar{it})x})$ ile bölünür ve (32) kullanılırsa,

$$\lambda_k(t) = (2k\pi i + it)^3 + (p_{2,0}[2k\pi i + it] + p_{3,0}) + A(\lambda_k(t)) + O\left(k(\frac{\ln|k|}{k})^2\right) \quad (37)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi (34)'ü ispatlayalım: (3) eşitliğinden $\lambda_k(t) - (2k\pi i + it)^3 = O(k)$ olduğu gözönüne alınır ve tekrar (32) kullanılırsa,

$$\sum_{k_1 : k_1 \neq 0} \left| \frac{\left(p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1) + it] + p_{3,k_1}\right)\left(p_{2,-k_1}[2k\pi i + it] + p_{3,-k_1}\right)}{\lambda_k(t) - (2\pi\, i(k-k_1) + it)^3} - \frac{\left(p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1) + it] + p_{3,k_1}\right)\left(p_{2,-k_1}[2k\pi i + it] + p_{3,-k_1}\right)}{(2k\pi i + it)^3 - (2\pi\, i(k-k_1) + it)^3} \right| = O\left(k(\frac{\ln|k|}{k})^2\right)$$

olduğu kolaylıkla görülür ve buradan

$$A(\lambda_k(t)) = A\left((2k\pi i + it)^3\right) + O\left(k(\frac{\ln|k|}{k})^2\right) \quad (38)$$

elde edilir. Son olarak (38)'de bulunan $A(\lambda_k(t))$ (37)'de yerine konulacak olursa, (34) elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Eastham M.S.P., "The Spectral Theory of Periodic Differential Equations", Scottish Acedemic Pres, Edinburg (1973).

2. Birkhoff G.D., "Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations", Trans. Amer. Math. Soc., 9, Pages 373-395 (1908).

3. Tamarkin J.D., "Some General Problems of The Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansion of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions", Math. Zeit., 27, pp. 1-54.

4. Naimark M.A., "Linear Differential Operators", Volume I, George G. Harap and Company, Ltd., London (1967).

5. Veliev O.A., "The Spectrum and Spectral Singularities of Differential Operators with Complex-Valued Periodic Coefficients", Differential Cprimenye Uravneniya, 19, pp. 1316-1324 (1983).

6. Veliev O.A., "Spectral Expansion Related to Non-Selfadjoint Diffrential Operator with Periodic Coefficients" (Russian, English), Diffrential Equations, 22(12), pp. 1403-1408 (1986).

7. Veliev O.A., Duman M.T., "The Spectral Expansion for a Nonself-Adjoint Hill Operator with a Locally Integrable Potential", J. Math. Anal. Appl., 265, pp. 76-90 (2002).