

AKÜ FEMÜBİD 18 (2018) 015502 (240-249)

AKU J. Sci. Eng. 18 (2018) 015502 (240-249)

DOI: 10.5578/fmbd.66881

İki Boyutlu Doğrusal Dönüşümlerin Geometrisi

Orhan Kurt¹¹Kocaeli Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü, Kocaeli.e-posta: orhnkrt@gmail.com

Geliş Tarihi: 27.12.2017 ; Kabul Tarihi:20.04.2018

Özet

İki boyutlu (2B) doğrusal dönüşümler Harita (Geomatik) mühendisliğinin birçok alanında geniş bir kullanım alanı bulmuştur. Bunlardan en çok kullanılanları, iki dik koordinat sistemi arasındaki benzerlik (Helmert) ya da eğik ve dik koordinat sistemleri arasında yapılan afin dönüşümdür. Birçok kullanıcı bu dönüşüm türlerinden birini seçerken yaptığı (kaynak-hedef koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm dikten-dike ya da eğikten-dike veya dikten-eğiğe olsun şeklindeki) geometrik kabule dikkat etmez. Yanlış geometrik model ile elde edilen dönüşüm parametreleri kullanılarak üretilen eşlenik olmayan nokta koordinatlar hatalı olurlar. Dönüşümün temel geometrisi doğru seçilmiş ise dönüşüm sonuçları gerçeği yansıtır. Aksi durumda, istatistik testler dahi yanıltıcı sonuçlar verebilir. Bu çalışmada, kullanıcının seçebileceği doğrusal dönüşümlerin geometrik yapısı incelenmiş ve kendi problemine uygun dönüşüm türünü seçmesi için önerilerde bulunulmuştur. Çalışmada ilk olarak iki boyutlu doğrusal dönüşümün en genel hali olan iki eğik koordinat sistemi arasındaki dönüşüm türü olan tam afin bağıntıları çıkarılmıştır. Uygulamada geniş bir kullanım alanı bulan eğik-dik (afin) ve dik-dik koordinat (benzerlik) sistemleri arasındaki dönüşümün türünün, iki eğik koordinat sistemi arasındaki dönüşüm türünün özel halleri olduğu geometrik olarak gösterilmiş ve bu dönüşümlerin genel bağıntıları çıkarılmıştır. Uygulamada yaygın olarak kullanılan eğik-dik (afin) ya da dik-dik (benzerlik) koordinat dönüşümü seçiminin nasıl bir yayılgı doğuracağı gerçek bir sayısal örnek üzerinde gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler

2B doğrusal dönüşümler; Tam afin; Afin; Benzerlik

Geometry of Two Dimensional Linear Transformations

Abstract

Two dimensional (2D) linear transformations are commonly used in a lot of field of Geomatics Engineering. Most used of them are similarity (Helmert) transformation between two orthogonal coordinate systems and affine transformation between an orthogonal and an oblique coordinate system. Since many users don't have any idea on the geometry (for source-target coordinates systems from an orthogonal to an orthogonal or from an orthogonal to an oblique or from an oblique to an orthogonal) of transformation preferred by them, they can be fallen in some mistakes after the transformation. Uncommon point coordinates produced using transformation parameters obtained with the wrong geometric model are to be incorrect. If the basic geometry of the transformation is chosen correctly, the transformation results reflect the truth. Otherwise, statistical tests also can give misleading results. The aim of this article is to inform the users about the transformation geometry and to ensure that the transformation chosen by them is to be suitable for their own transformation problem. In this article, the most general statement of a two-dimensional linear transformation has been derived from a relationship between two oblique coordinate systems at first. Then, it is demonstrated geometrically that the transformations between oblique and orthogonal or between two orthogonal coordinate systems are special states of the most general model, and their formulas are derived from the general model. By a transformation problem taken from real life, it is demonstrated that a wrong choice between the affine and similarity transformations which are generally used in practice is caused wrong results.

Keywords

Linear transformations in 2D; exact affine; affine; similarity

1. Giriş

İki boyutlu (2B) doğrusal dönüşümler mesleğimizin birçok alanında yaygın olarak kullanılmaktadır ve literatürde bu konu ile ilgili birçok kaynağa ulaşılabilir (Öztürk ve Şerbetçi 1996, Demirel 1997, Kurt 2002, Malissiovas vd. 2016). 2B doğrusal dönüşümlerden en çok kullanılanları, iki dik koordinat sistemi arasındaki benzerlik (Helmert) dönüşümü (Öztürk ve Şerbetçi 1996, Demirel 1997, Kurt 2002, Malissiovas vd. 2016) yada eğik-dik koordinat sistemleri arasındaki afin dönüşümüdür (Öztürk ve Şerbetçi 1996, Demirel 1997, Kurt 2002). Kullanıcıların çoğu bu dönüşüm türlerinden birini seçerken öngördüğü dönüşümün geometrik anlamı üzerinde durmadığından, bazı yanlışlara düşebilmektedir. Bu çalışmanın amacı kullanıcının seçeceği dönüşüm türünün geometrisini (fonksiyonel modeli) belirginleştirmek ve tercih ettiği dönüşüm türünün kendi problemine uygunluğuna karar vermesine yardımcı olmaktadır.

Bu çalışmanın temel katkısı, anonim hale gelmiş birçok kaynakta yer almayan bir bakış açısıyla organize edilmiş olmasıdır. Çalışmada gerçek iki afin koordinat sistemi arasında gerçekleştirilen ve *Tam Afin (Exact Affine)* olarak adlandırılan bir dönüşüm tanımlanmıştır. Bu genel dönüşümün; bu çalışmada *Afin-1 (eğik-dik)* ve *Afin-2 (dik-eğik)* olarak adlandırılan dönüşümlerin yanı sıra *Benzerlik* dönüşümü ile olan ilişkileri teorik olarak gösterilmiştir. Bu temel katkıyı gölgelememek ve yazının hacmini genişletmemek için matematik modelin (fonksiyonel + stokastik) kurulması ve (dönüşüm) sonuçlarının test edilmesi konusu üzerinde ayrıntılı olarak durulmamıştır. Okuyucunun, matematik modelin kurulması, çözümü ve sonuçların test edilmesi aşamaları ile ilgili ayrıntılı bilgiye Leick vd. (2015), Öztürk ve Şerbetçi (1996), Demirel (1997), Koch (1999), Kurt (2002, 2010) gibi kaynaklarından ulaşabileceği düşünülmüştür.

Sayısal uygulama bölümünde beş eşlenik noktadan oluşan bir uygulama seçilmiştir (Kurt 2002). Dik (imar ve kadastro) koordinat sistemlerinde üretildikleri öngörüsüne sahip olduğumuz bu eşlenik koordinatlar, stokastik özellikleri ve dönüşüm parametreleri değişmeyecek şekilde ötelenmiştir.

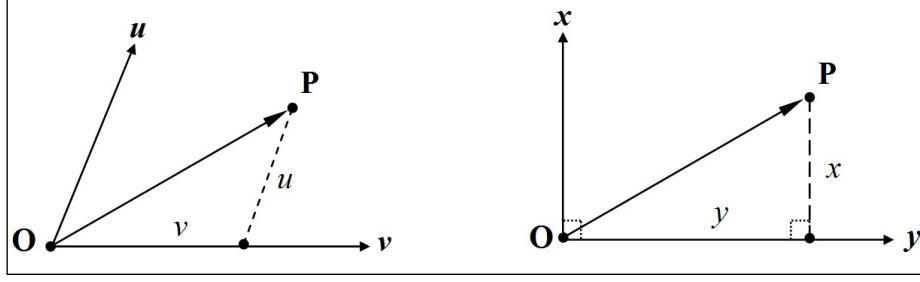
Sayısal verileri değerlendirmek için *Python 2.7* ve *3.6* versiyonlarında çalışan bir yazılım geliştirilmiştir (Int Kyn. 1, 2). Bu yazılım afin (eğik-dik: eğik koordinat sisteminden dik koordinat sistemine) ve benzerlik (dik-dik: dik koordinat sisteminden dik koordinat sistemine) dönüşüm parametrelerini (ve eğik koordinat sistemine ait baz vektörleri arasındaki açıyı) ve bu parametrelerin duyarlıklarını hesaplamakta, dönüşüm parametrelerini test etmekte ve Değiştirilmiş Pope yöntemine (Öztürk ve Şerbetçi 1996; Kurt 2002, 2010) göre koordinat çiftleri üzerinden klasik uyumsuz ölçüler testi yapmaktadır. Yazılım uyumsuz koordinat çifti testini, koordinat değişim vektörleri ile bu vektörlere ait hata elipsleri üzerinden grafik olarak yapabilmektedir. Bu yazılım ile değerlendirilen örnek uygulama üzerinden, uygun olmayan dönüşüm modeli seçiminin nasıl hatalı sonuçlara yol açabileceği gösterilmiştir.

2. İki Boyutlu Doğrusal Koordinat Sistemleri ve Dönüşümler

Bir noktanın iki boyutlu uzaydaki (düzlemdeki) konumu, referans seçilen iki vektörün doğrultusuna göre verilen bileşenler ile belirlenir. Referans seçilen iki (baz) vektörünün birbirleri ile olan ilişkileri iki boyutlu koordinat sisteminin türünü belirler. Herhangi iki vektörün oluşturduğu koordinat sistemine eğik (afin) koordinat sistemi, birbirine dik iki vektörün oluşturduğu sisteme dik ya da ortogonal (veya Öklit) koordinat sistemi denir (Hacısalihoglu 1990), (Şekil 1).

Eğik koordinat sisteminde paralellik esastır. Dik koordinat sistemi ise eğik koordinat sisteminin özel bir hali olup, eğik koordinat sisteminin temelini oluşturan paralelliğin yanı sıra koordinat eksenlerinin diklik özelliğini de taşımasıdır. Harita mühendisliğinde iki boyutlu doğrusal dik koordinat sistemi projeksiyon koordinatlarının gösteriminde kullanılır. Eğik koordinat sistemi ise, genellikle fotogrametride resmin fiziksel özelliklerinden kaynaklanan deforme olmuş görüntü koordinatlarının oluşturduğu koordinat sistemi olarak düşünülmektedir. Verilen koordinat kümeleri hakkında ön bir bilgi yoksa, bu koordinatlara eğik koordinatlar olarak bakılabilir. İki koordinat sistemi

arasındaki dönüşüm öncelikle eğik koordinat sistemleri arasında düşünülebilir.



Şekil 1. Bir P noktasının eğik (afin) ve dik (ortogonal) koordinat sistemlerindeki gösterimleri.

2.1 İki Eğik Koordinat Sistemi Arasındaki Dönüşüm

İki boyutlu doğrusal dönüşümün en genel hali iki eğik koordinat sistemi arasındaki (tam afin) dönüşümdür (Şekil 2). Şekil 2'de (x, y) ve (u, v) ikililerinden oluşan iki eğik koordinat sistemi arasındaki ilişki gösterilmiştir. ($//u, //v$) gösterimi, başlangıcı (x, y) koordinat sistemi başlangıcına ötelenmiş (u, v) sistemini temsil etmektedir (Şekil 2). Çalışmadaki bütün dönüşüm bağıntıları Şekil 2 kullanılarak (x, y) koordinat sisteminden (u, v) koordinat sistemine yapılan dönüşüme göre türetilmiştir.

Şekil 2'de (u_0, v_0) ; (x, y) sisteminin başlangıcı olan B noktasının (u, v) sistemindeki koordinatları ve iki koordinat sistemi arasındaki dönüşümün öteleme elemanlarıdır. η ; u ve v baz vektörleri arasındaki açı, γ ; x ve y baz vektörleri arasındaki açı, α ve β ; sırasıyla x ekseninden u eksenine ve y ekseninden v eksenine doğru uygulanan dönüklük açılarıdır. Bu açılar arasında;

$$\eta = \alpha + \beta + \gamma \quad (1)$$

ilişkisi vardır (Şekil 2). Şekil 2'de tanımlanan açıların dışında kalan diğer açılar, tanımlanan bu açılar ile paralel doğrular arasında kalan açı özelliklerinden yararlanılarak kolayca bulunabilirler. Yine Şekil 2'den yararlanarak u ve v koordinatları;

$$u = \overline{AO} + \overline{EP} = \overline{AO} + \overline{DE} + \overline{DP} \quad (2)$$

$$v = \overline{AB} + \overline{BE} \quad (3)$$

eşitlikleri ile elde edilir. (2) ve (3) eşitliklerindeki büyüklükler, Şekil-2'de tanımlanan açılar ve (x, y) koordinatları cinsinden aşağıdaki bağıntılarla

bulunur. $\triangle CDP$ üçgeninde sinüs teoremi yazılırsa,

$$\overline{DP} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} x \quad (4)$$

$$\overline{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} x \quad (5)$$

eşitlikleri elde edilir. $\triangle BDE$ üçgeninde sinüs teoreminden,

$$\overline{DE} = \frac{\sin \beta}{\sin \eta} (y + \overline{CD}) = \frac{\sin \beta}{\sin \eta} y + \frac{\sin \beta}{\sin \eta} \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} x \quad (6)$$

$$\overline{BE} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \eta} (y + \overline{CD}) = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \eta} y + \frac{\sin \alpha}{\sin \eta} x \quad (7)$$

büyüklükleri bulunur. (6) ve (7) eşitlikleri (2) ve (3) eşitliklerinde yerine yazılırsa, iki eğik koordinat sistemi arasındaki dönüşüm bağıntıları elde edilmiş olur.

$$u = u_0 + \frac{\sin \beta \sin \alpha + \sin \gamma \sin \eta}{\sin \eta \sin(\alpha + \gamma)} x + \frac{\sin \beta}{\sin \eta} y \quad (8)$$

$$v = v_0 + \frac{\sin \alpha}{\sin \eta} x + \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \eta} y \quad (9)$$

(8) ve (9) eşitlikleri incelediğinde ölçek parametresinin bu eşitliklerde yer almadığı görülür. İki eğik sistemin birbirleri ile eşleşen koordinat eksenleri (u ile x ve v ile y) boyunca ölçek farklılığı olduğu düşünülür ve bunlar λ ve μ olarak

tanımlanırsa, iki eğik koordinat sistemi arasındaki dönüşüm bağıntılarına ulaşılır.

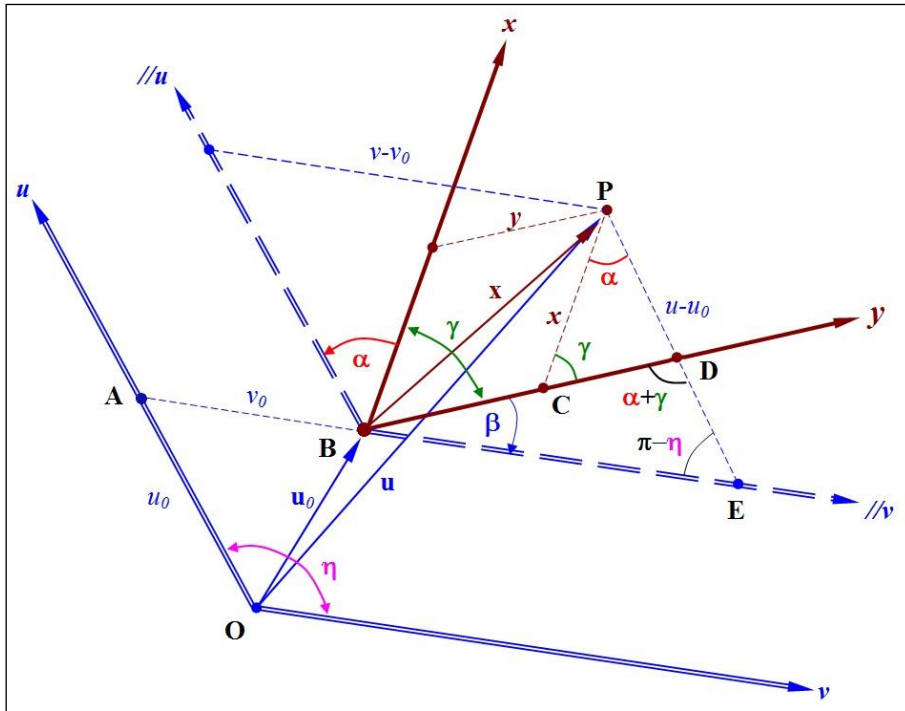
$$u = u_0 + \frac{\sin\beta \sin\alpha + \sin\gamma \sin\eta}{\sin\eta \sin(\alpha + \gamma)} (\lambda x) + \frac{\sin\beta}{\sin\eta} (\mu y) \quad (10)$$

$$v = v_0 + \frac{\sin\alpha}{\sin\eta} (\lambda x) + \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin\eta} (\mu y) \quad (11)$$

Bu bağıntılar iki afin koordinat sistemi (çatısı) arasındaki en genel 2B doğrusal dönüşüm bağıntılarını temsil etmektedir. Fazla kullanılmayan

ve geometrik anlamı üzerinde fazla durulmamış olan bu dönüşüm türü, çalışmada *Tam Afin Dönüşümü* (*Exact Affine Transformation*) olarak adlandırılmıştır.

Tam afin dönüşümünde yedi adet bilinmeyen vardır. Bilinmeyenler; iki öteleme (u_0, v_0) , iki ölçek (λ, μ) ve $\eta = \alpha + \beta + \gamma$ den dolayı üç açıdır. Açı bilinmeyenleri (α, β, γ) ya da (α, β, η) olarak seçilebilir (Şekil 2).



Şekil 2. İki eğik koordinat sistemi arasındaki (tam afin) dönüşümün geometrisi.

2.2 Eğik ve Dik Koordinat Sistemleri Arasındaki Dönüşüm

Bir eğik (afin) koordinat sisteminden bir dik (ortogonal) koordinat sistemine ya da bir dik koordinat sisteminden bir eğik koordinat sistemine doğru tanımlanan dönüşüm türüdür. Bir önceki başlık altında elde edilen (10) ve (11) eşitliklerinde $\eta = \pi/2$ alınırsa *eğik-dik* (*Afin-1*) ve $\gamma = \pi/2$ alınırsa *dik-eğik* koordinat dönüşümleri tanımlanmış olur. Bu dönüşüm türlerinde bilinmeyenler; iki öteleme, iki dönüklük ve iki ölçektir.

$\eta = \pi/2$ olarak alındığında (10) ve (11) eşitliklerindeki bilinmeyen sayısı yediden altıya

düşer. $\sin\eta = 1$ ve (1) eşitliği $\gamma = \pi/2 - (\beta + \alpha)$ şeklinde düzenlenerek (10) ve (11) eşitliklerinde yerine yazılır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa (12) ve (13) bağıntılarına ulaşılır.

$$u = u_0 + \cos\alpha (\lambda x) + \sin\beta (\mu y) \quad (12)$$

$$v = v_0 + \sin\alpha (\lambda x) + \cos\beta (\mu y) \quad (13)$$

Bu çalışmada *Afin-1 Dönüşümü* olarak adlandırılan ve *eğik-dik* koordinat dönüşümünü tanımlayan bu bağıntılar, Harita (Geomatik) mühendisliği ve diğer birçok mühendislik alanında *Afin Dönüşümü* (*Affine Transformation*) olarak bilinir. Harita mühendisliği alanında bu tip bir dönüşüme, bir resme ya da

deforme olmuş bir paftaya ait koordinatlardan arazi koordinatlarına dönüşüm örnek olarak verilebilir.

Bu çalışmada *Afin-2* olarak adlandırılan *Dik-eğik* (*Afin-2*) koordinat dönüşümü (10) ve (11) bağıntılarında $\gamma = \pi/2$ alınarak elde edilir. $\sin\gamma = 1$ ve (1) eşitliğinden $\eta = \pi/2 + (\alpha + \beta)$ elde edilip (10) ve (11) eşitliklerinde yerine yazılır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa (14) ve (15) eşitliklerine ulaşılır.

$$u = u_0 + \frac{\cos\beta}{\sin\eta}(\lambda x) + \frac{\sin\beta}{\sin\eta}(\mu y) \quad (14)$$

$$v = v_0 + \frac{\sin\alpha}{\sin\eta}(\lambda x) + \frac{\cos\alpha}{\sin\eta}(\mu y) \quad (15)$$

Bu eşitlikler tam afin için verilen (10) ve (11) bağıntıları yerine de kullanılabilir. Diğer açı $\gamma = \eta - (\alpha + \beta)$ bağıntısı ile hesaplanır.

Dönüşen (u ve v) koordinat sisteminin eksenleri arasındaki açı $\gamma = \pi/2$ alınır ve (1) eşitliğinde yerine yazılarak elde edilen $\eta = \pi/2 + (\alpha + \beta)$ bağıntısı (14) ve (15) bağıntılarında yerine yazılırsa, (16) ve (17) dönüşüm bağıntıları elde edilir.

$$u = u_0 + \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)}(\lambda x) + \frac{\sin\beta}{\cos(\alpha + \beta)}(\mu y) \quad (16)$$

$$v = v_0 + \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha + \beta)}(\lambda x) + \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha + \beta)}(\mu y) \quad (17)$$

Dönüklük açılarına (α , β) göre verilen (16) ve (17) bağıntıları uygulayıcılar açısından daha uygun bir *Afin-2* dönüşümüdür. Harita mühendisliğinde *Afin-1* dönüşümünün tersi olan ve (12) ve (13) eşitlikleri için önerilen örneğin tersi olan (dik koordinat sisteminden afin koordinat sistemine olan) dönüşümdür.

Bu iki (*Afin-1* ve *Afin-2*) dönüşüm arasındaki ters ilişki (12), (13) ve (16), (17) bağıntıları karşılaştırılarak kolayca görülebilir. Ötelemeler ters işaretli, ölçekler ve dönüklük matrisleri de birbirlerinin tersi olurlar. *Afin-1* dönüşümünün (12) ve (13) bağıntılarındaki dönüklük matrisinin tersi,

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos(\alpha + \beta)} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ile elde edilir. *Afin-1* ve *Afin-2* dönüşümlerinin ters işaretli olan dönüklük açıları yukarıdaki eşitlikte

yerine yazılır, $\cos\chi = \cos(-\chi)$ ve $-\sin\chi = \sin(-\chi)$ $\{\chi = \alpha, \beta\}$ dikkate alındığında *Afin-2* dönüklük matrisi

$$\frac{1}{\cos(\alpha + \beta)} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu dönüklük matrisinin (16) ve (17) eşitliklerinde verilen *Afin-2* dönüklük matrisi ile eşdeğer olduğu kolayca görülür. Bu durum sayısal uygulama bölümünde incelenmiş ve her iki dönüşümde afin koordinat sistemi olarak öngörülen koordinat sisteminin eksenleri arasındaki kesişim açıları (γ ve η) da duyarlılıkları ile birlikte hesaplanmıştır.

(16) ve (17) eşitlikleri ile verilen *Afin-2* dönüşüm bağıntıları yerine, dönüşen (kaynak, $x-y$) ve dönüştürülen (hedef, $u-v$) koordinat sistemleri değiştirilerek (12) ve (13) bağıntılarının kullanılması uygulayıcılar açısından daha kolaydır. Daha açık bir ifade ile dönüşen sistem (kaynak, $u-v$) ve dönüştürülen sistem (hedef, $x-y$) olarak alınmalıdır.

2.3 İki Dik Koordinat Sistemi Arasındaki Dönüşüm

Benzerliği koruduğu için *Benzerlik* (*Helmert*) *Dönüşümü* olarak adlandırılır. Bir koordinat sistemindeki herhangi bir geometrik şekil benzerlik dönüşümden sonra diğer sistemde ötelenmiş, dönmüş ve ölçeklenmiş olarak elde edilir. Şekil-2 den, $\beta = -\alpha$ $\lambda = \mu$ ve $\eta = \pi/2$ alınarak (14) ve (15) eşitliklerinde yerine yazılırsa benzerlik dönüşüm bağıntılarına ulaşılır.

$$u = u_0 + (\lambda \cos\alpha)x - (\lambda \sin\alpha)y \quad (18)$$

$$v = v_0 + (\lambda \sin\alpha)x + (\lambda \cos\alpha)y \quad (19)$$

Açı yönü $\alpha = -\beta$ şeklinde alınırsa dönüşüm bağıntıları

$$u = u_0 + (\lambda \cos\beta)x + (\lambda \sin\beta)y \quad (20)$$

$$v = v_0 - (\lambda \sin\beta)x + (\lambda \cos\beta)y \quad (21)$$

olarak elde edilir. (18), (19) ve (20), (21) eşitliklerindeki ötelemelerin ters işaretli, ölçeklerinde birbirlerinin tersi olduğu unutulmamalıdır. Harita mühendisliği ve birçok mühendislik alanında yaygın olarak kullanılan

dönüşüm türü *iki dik* koordinat sistemi arasında gerçekleştirilen benzerlik (Helmert) dönüşümüdür.

3. Matematik Modelin Kurulması ve Değerlendirilmesi

Yukarıda fonksiyonel modelleri çıkarılan dönüşüm türlerinde bilinmeyenler dönüşüm parametreleridir. Bilinmeyenleri bulabilmek için her iki sistemde koordinatları bilinen ortak noktalara ihtiyaç duyulur. Ortak noktaların sayısı, bilinmeyen sayısından ne kadar fazla ise, hesaplanan dönüşüm parametrelerinin güvenilirliği de o kadar artar. Serbestlik derecesi sıfırdan büyükse parametrelerin tek anlamlı çözümü için En Küçük Kareler (EKK) ilkesi uygulanır. Burada mesleğimizde yaygın olarak kullanılan benzerlik dönüşümü ve eğik–dik (afin) koordinat sistemleri üzerinde durulacak sayısal örnekler bunlardan seçilecektir. Ayrıca dengeleme modellerinin kurulmasından ayrıntılı olarak bahsedilmeyecektir. Benzerlik dönüşümü için Öztürk ve Şerbetçi (1996), Demirel (1997), Kurt (2002) ve Malissiovas vd. (2016) kaynaklarından, *eğik–dik* (afin) koordinat dönüşümü için Demirel (1997) ve Kurt (2002, 2010) kaynaklarından yararlanılabilir. İşlem adımları iki şekilde gerçekleştirilebilir.

- (18) ve (19) eşitliklerindeki (u, v) koordinat çiftleri ölçüler olarak ele alınıp, fonksiyonel model kurulur.
- Her bir koordinatın ağırlıkları eşit kabul edilir ve stokastik model oluşturulur.
- En Küçük Kareler (EKK) ilkesi uygulanır. İstenilen bir sınır değere göre model testi yapılır.
- Model testi geçersiz ise uyumsuz koordinatların var olduğu düşünülerek, uyumsuz ölçü testi gerçekleştirilir. Uyumsuz ölçü yok ise kurduğumuz matematik model hatalı demektir. Öngördüğümüz model elimizdeki ortak koordinat çiftlerinin dönüşümüne uygun değildir. Model genişletilerek işlem yeniden tekrarlanır. Eğer uyumsuz ölçü yok ve model hatalı ise iki sistem arasında doğrusal bir dönüşüm ilişkisi yoktur. Yani bu iki sistem arasında öteleme, döndürme yada ölçeklendirmeden başka örneğin yansıma yada başka bir özellik var demektir. Bu ortak noktalar bir grafik programda gösterilerek yeniden modellenmeli ve buradaki işlem adımları o modele göre gerçekleştirilmelidir.

İkinci yol için işlem sırası aşağıdaki gibidir.

- (10) ve (11) eşitliklerindeki (u, v) koordinat çiftleri ölçüler olarak ele alınıp, fonksiyonel model kurulur.
- Her bir koordinatın ağırlığı eşit alınarak stokastik model oluşturulur.
- EKK ilkesi uygulanır. İstenilen bir sınır değere göre model testi yapılır.
- İki sistem arasında doğrusal dönüşüm var ve uyumsuz ölçü yok ise matematik model geçerli çıkacaktır. En genel modelde; öngörülen farklı dönüklük, farklı ölçek ve koordinat sistemlerinin dik olup olmadıkları, parametre test yöntemleri ile test edilir. Anlamsız bulunan parametre modelden çıkarılır, yeni model için aynı işlemler yinelenir.

4. Bulgular

Çizelge 1’de verilen ve beş eşlenik noktadan oluşan nokta kümesinin koordinat değerleri gerçek bir uygulamadan seçilmiştir (Kurt 2002). Dik (imar ve kadastro) koordinat sistemlerinde üretildikleri bilinen bu eşlenik koordinatlar, stokastik özellikleri ve dönüşüm parametreleri değiştirilmeyecek şekilde ötelenmiştir (Kurt 2002) (Çizelge 1, Şekil 3).

Çizelge 1. Her iki sistemde ortak (eşlenik) nokta koordinatları (Kurt 2002).

<i>NN</i>	<i>x [m]</i>	<i>y [m]</i>	<i>u [m]</i>	<i>v [m]</i>
23	88671.77	9026.47	88671.27	9026.26
29	89687.78	3741.75	89687.35	3741.87
43	91914.64	7703.51	91913.74	7703.24
48	92418.73	8063.96	92417.74	8063.66
86	89159.88	3295.03	89159.59	3295.21

Bu çalışmanın temel amacı (sayısal verilerin alındığı Kurt (2002) kaynağında ve diğer benzer kaynaklarda da verilmeyen) dönüşümler arasındaki geometrik ilişkileri (ve farklılığı) belirginleştirmek ve tartışmaktır. Bu nedenle, dönüşüm modellerinin ayrıntılı çözümünün verilmesinden özellikle kaçınılmıştır. Literatürde buna benzer birçok çalışmaya ulaşılabilir. Bu çalışmada verilen kaynaklar, dönüşüm modellerinin kurulmasını ve çözümünü yeterli sadelikte incelemiştir ve 2B dönüşüm literatüründe verilen kaynakların hepsini kapsamaktadır. Sözelimi, Malissiovas vd. (2016) tarafından incelenen TLS (Total Least Square) ile Benzerlik dönüşümü, Öztürk ve Şerbetçi (1996),

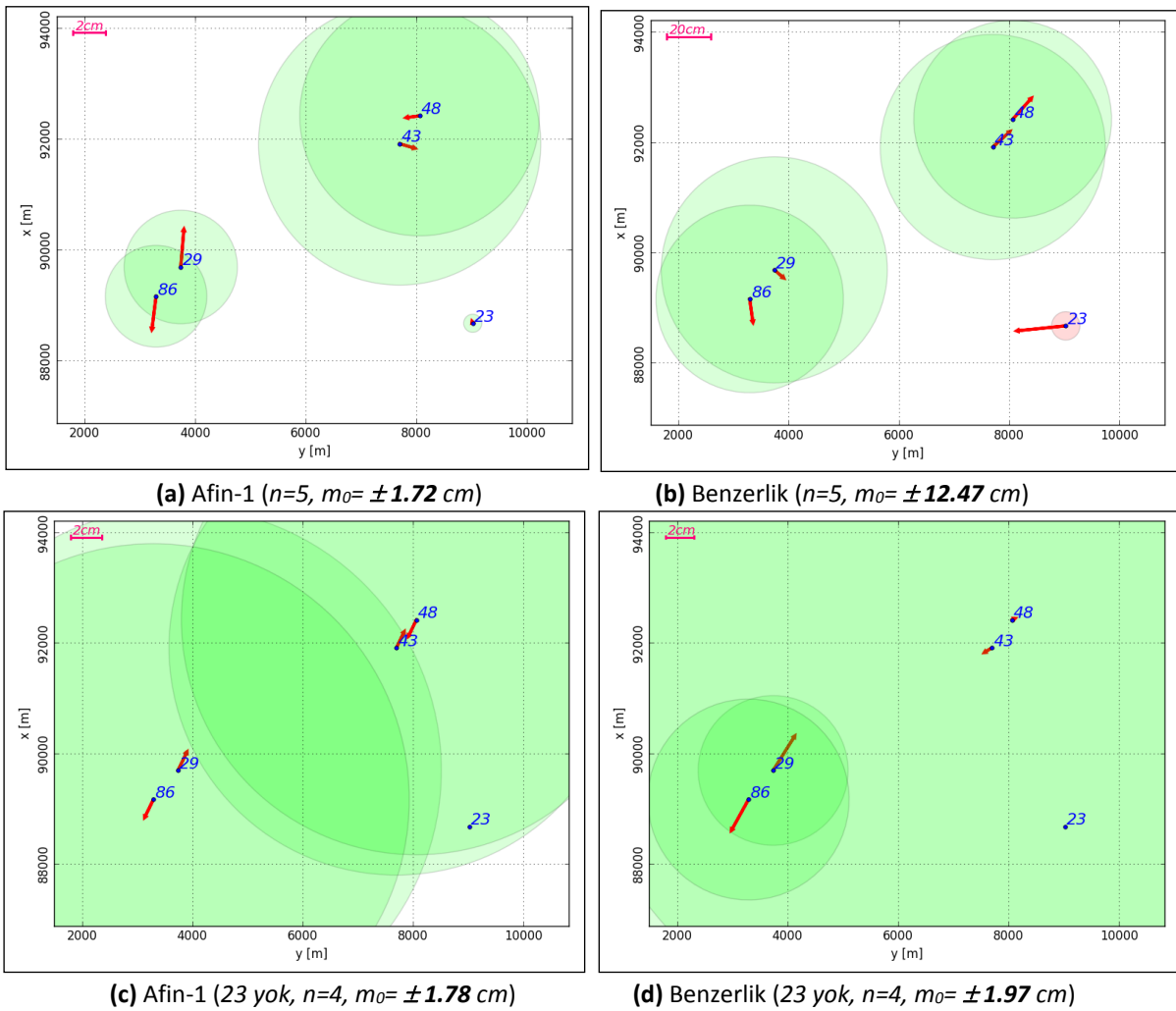
Demirel (1997) ve Kurt (2002) kaynaklarında verilen benzerlik dönüşümü ile aynı sonuçları üretmektedir.

Çizelge 1 de verilen örnek uygulamanın ayrıntılı çözümü Kurt (2002) kaynağında açık olarak verilmiştir. Okuyucu eğik-dik ve iki dik koordinat sistemi arasındaki dönüşümlerin matematik modellerinin kurulması, çözümü ve istatistik testler için bu kaynaktan yararlanabilir.

Bu çalışmada Python 2.7 ve 3.6 sürümleri ile hiçbir değişiklik yapmadan çalışabilen ve grafik uyumsuz ölçü testi ile parametre anlamlılık testleri yapabilen bir yazılım geliştirilmiştir (Int Kyn. 1, 2). Verilen

koordinatlar bu yazılımla değerlendirilmiş, dönüşümlerin uyumsuz ölçü testi aşaması Değiştirilmiş Pope yöntemine göre grafik olarak yapılmıştır (Şekil 3).

Eşlenik nokta koordinatlarının ağırlıklarının eşit ve korelasyonsuz alındığı dönüşüm problemlerinde, koordinat çiftlerine ait düzeltmeler arasındaki korelasyon sıfır olur. Bu düzeltme vektörlerinin grafik uyumsuz ölçü testleri için çizdirilen hata elipsleri daire görünümlü olurlar (Şekil 3). Hata elipsleri yeşil olan düzeltme vektörleri, güven elipsleri içinde kalmaktadır (Şekil 3a, 3c, 3d).



Şekil 3. İki boyutlu doğrusal dönüşümler için grafik uyumsuz ölçü testi (a) Afin-1 ($xy \rightarrow uv$, $n=5$) ve (b) Benzerlik ($xy \rightarrow uv$, $n=5$) (c) Afin-1 ($xy \rightarrow uv$, 23 yok, $n=4$) ve (d) Benzerlik ($xy \rightarrow uv$, 23 yok, $n=4$) (Not: Yeşil hata elipsi {=hata dairesi} uyumlu ve pembe hata elipsi uyumsuz (23) koordinat çiftini temsil etmektedir, n : Ortak nokta sayısı).

Hata elipsleri pembe olan uyumsuz düzeltme vektörleri ise güven bölgeleri dışına taşmaktadır (Şekil 3b'de 23 numaralı nokta). Güven bölgeleri dışına taşan bu tip düzeltme vektörlerinden test

büyüklüğü en büyük olan (çalışmada 23 numaralı) nokta eşlenik (ortak) nokta kümesinden çıkarılmış ve uyumsuz ölçü testi aşaması tekrarlanmıştır. Şekil 3c ve 3d de kalan eşlenik noktaların hata elipslerinin

büyüklüğü, kalan eşlenik noktalarının uyumluluğunu göstermektedir.

Çizelge 2. Eşlenik noktaların tamamı ($n=5$) ile *Afin* ve *Benzerlik* dönüşüm sonuçları.

Açıklama [Birim]	Simge	<i>Afin-1</i> (<i>Afin</i> → <i>Dik</i>) ($xy \rightarrow uv$)		<i>Afin-2</i> (<i>Afin</i> → <i>Dik</i>) ($uv \rightarrow xy$)		<i>Benzerlik</i> (<i>Dik</i> → <i>Dik</i>) ($xy \rightarrow uv$)	
<i>Serbestlik Derecesi</i>	f	4	—	4	—	6	—
<i>Soncul KOH</i> [cm]	m_0	—	± 1.72	—	± 1.72	—	± 12.47
<i>Ötelemeler</i> [m]	u_0 v_0	12.5864 ± 0.49 4.3836 ± 0.49		-12.5864 ± 0.49 -4.3836 ± 0.49		9.2386 ± 1.80 -2.2114 ± 1.80	
<i>Dönüklük(ler)</i> [cc]	α β	-28.36 ± 0.03 28.61 ± 0.02		28.36 ± 0.03 -28.61 ± 0.02		19.70 ± 0.13 —	
<i>Ölçek(ler)</i> [ppm]	λ μ	-142.99 ± 5.47 -71.46 ± 3.48		142.99 ± 5.47 71.46 ± 3.48		-106.93 ± 19.86 —	
<i>Kesişim Açısı</i> [g]	γ η	<u>100.005697</u> 100	± 0.04 ^{cc} ± 0	100 <u>99.999974</u>	± 0 ± 0.04 ^{cc}	100 100	± 0 ± 0
<i>Dönüklük Farkı</i> [cc]	$ \alpha - \beta $	-0.26	± 0.04				
<i>Ölçek Farkı</i> [ppm]	$ \lambda - \mu $	-71.53	± 6.48				
<i>Afin Anlamlılık Testi</i>	$T >$	<u>80.02</u>	<i>Anlamlı</i>				
<i>F-Dağ. Sınır Değeri</i>	$F_{\%95}$	6.94					

ppm : mm/km
g : Grad
cc : Grad saniyesi
KOH : Karesel Ortalama Hata

Çizelge 3. 23 numaralı nokta atılarak ($n=4$) yapılan *Afin-1* ve *Benzerlik* dönüşüm sonuçları.

Açıklama [Birim]	Simge	<i>Afin-1</i> (<i>Afin</i> → <i>Dik</i>) ($xy \rightarrow uv$)		<i>Benzerlik</i> (<i>Dik</i> → <i>Dik</i>) ($xy \rightarrow uv$)	
<i>Serbestlik Derecesi</i>	f	2	—	4	—
<i>Soncul KOH</i> [cm]	m_0	—	± 1.78	—	± 1.97
<i>Ötelemeler</i> [m]	u_0 v_0	19.9104 ± 5.94 1.8749 ± 5.94		11.6803 ± 1.80 -3.9660 ± 1.80	
<i>Dönüklük(ler)</i> [cc]	α β	-10.03 ± 0.43 -5.44 ± 0.28		32.64 ± 0.02 —	
<i>Ölçek(ler)</i> [ppm]	λ μ	-227.01 ± 68.11 -89.79 ± 43.36		-132.61 ± 3.80 —	
<i>Kesişim Açısı</i> [g]	γ η	<u>100.000459</u> 100	± 0.51 ^{cc} ± 0		
<i>Dönüklük Farkı</i> [cc]	$ \alpha - \beta $	4.59	± 0.51		
<i>Ölçek Farkı</i> [ppm]	$ \lambda - \mu $	-137.23	± 80.74		
<i>Afin Anlamlılık Testi</i>	$T >$	<u>41.30</u>	<i>Anlamlı</i>		
<i>F-Dağ. Sınır Değeri</i>	$F_{\%95}$	19.00			
<i>23 Numaralı</i>	δ_u	-35.80	± 28.86	4.14	± 1.79
<i>Noktanın Hatası</i>	δ_v	12.26	± 28.86	40.73	± 1.79
[cm]	δ_s	<u>37.84</u>	<u>± 28.86</u>	<u>40.94</u>	<u>± 1.79</u>

Şekil 3c ve 3d ün tamamına yakının yeşil olması, çizilen hata elipslerinin güven bölgelerini göstermesinden kaynaklanmaktadır (Şekil 3). Ayrıca Şekil 3b'deki çizgisel ölçeğin (20 cm) diğer şekillerin

çizgisel ölçeklerinden (2 cm) büyük olması En Küçük Karelerin (EKK) hataları yayma özelliğinden kaynaklanmaktadır. Şekil 3a'da yanlış fonksiyonel

model (*Afin-1*) öngörüsü uyuşumsuz eşlenik noktayı gizlemiştir.

Benzerlik dönüşümü sonucunda karesel ortalama hata $m_0 = \pm 0.1247 m$ bulunmuş (Çizelge 2), uyuşumsuz olan 23 numaralı nokta (Şekil 3b) eşlenik nokta kümesinden çıkarılarak yapılan benzerlik dönüşümünün ortalama hatası $m_0 = \pm 0.0197 m$ olarak elde edilmiştir ve uyuşumsuz ölçü kalmadığına karar verilmiştir (Çizelge 3, Şekil 3d).

Eğik-dik (Afin-1) dönüşümü sonucunda iki koordinat sistemi arasında farklı dönüklük ve farklı ölçek anlamlı bulunmuştur (Çizelge 2). Dönüşümün ortalama hatası $m_0 = \pm 0.0172 m$ olarak hesaplanmış ve uyuşumsuz ölçü bulunmamıştır. Bunun nedeni eşlenik nokta sayısının az olması ve uyuşumsuz olan 23 numaralı noktanın eşlenik nokta kümesinin uzağında kalmasıdır. Bu nedenle *Afin-1* dönüşümü bu uyuşumsuzluğu kendi yapısına uydurmuştur.

Dönüşümün serbestlik derecesi büyük olsaydı ve 23 numaralı noktanın geometrik yeri daha uygun olarak verilseydi (dönüşümü yapılacak alanın ortalarında yer alsaydı), *Afin-1* dönüşümünü de uyuşumsuz olan 23 numaralı noktayı belirleyebilirdi. 23 numaralı nokta çıkarılarak yapılan *Afin-1* ve *Benzerlik* dönüşüm sonuçları uyumlu gibi gözükmektedir (Çizelge 3). Bu yanıltıcı uyumluluk, Çizelge 3'te verilen soncul varyans değerlerinin (F-Dağılım fonksiyonunun olasılık değeri $P_F\{ 1.97^2 / 1.78^2 \} = \%50.43 < F_{(4,2)} = \%95$ olduğu için $E\{ 1.97^2 \} = E\{ 1.78^2 \}$ den dolayı) eşdeğerliğinden ve 23 numaralı noktanın *Afin-1* ve *Benzerlik* dönüşümü sonucunda elde edilen hata vektörleri farkının (t-Dağılım fonksiyonunun olasılık değeri $P_t\{ |37.84 - 40.94| / 28.92 \} = \%54.09 < t_{(4+2)} = \%95$ olduğundan $E\{ 3.10 cm \} = 0 cm$ den dolayı) istatistiksel olarak anlamsız olmasından görebiliriz (Çizelge 3).

Yine aynı çizelgede, *Afin-1* seçimi anlamlı çıkmıştır. Bu anlamlılığın farklı ölçek ya da farklı dönüklük öngörüsünden mi kaynaklandığı Çizelge 3'ten yaralanılarak belirlenebilir. Çizelgede verilen değerlerden farklı dönüklüğün ($P_t\{ |4.59| / 0.51 \} = \%99.39 > t_{(2)} = \%95$ den dolayı) anlamlı olduğu ve farklı ölçeğin ise ($P_t\{ |-137.23| / 80.74 \} = \%88.44 < t_{(2)} = \%95$ den dolayı) anlamsız olduğu görülmektedir (Çizelge 3).

Son iki paragraftaki çelişkili durum, uygulayıcının dönüşüm modeli seçimi konusunda kararsız kalmasına neden olur. İşte bu gibi durumlarda ilk geometrik öngörü çok önem kazanır. Sözelimi Çizelge 1 de verilen koordinatların iki dik jeodezik (imar ve kadastro) koordinat sisteme ait olduğu düşünüldüğünde, benzerlik dönüşümü tercihi daha anlamlı hale gelir. Verdiğimiz kararın doğruluğunu Çizelge 3'te verilen dönüşüm parametrelerinin duyarlıklarını inceleyerek de görebiliriz. Bu çizelgede, *Benzerlik* dönüşüm parametrelerinin duyarlıklarının *Afin-1* parametre duyarlıklarından daha güvenilir olarak hesaplandığı da görülmektedir.

Dönüşümlerde, eşlenik nokta sayısı ve dağılımı uyuşumsuz ölçülerin doğru belirlenmesinde oldukça önemlidir. Çalışmada verilen örnek uygulamada (Çizelge 1) olduğu gibi eşlenik nokta sayısı az ve nokta dağılımı kötü ise, öngörülen matematik modelin doğru olarak seçilmesi daha da önem kazanmaktadır (Şekil 3, Çizelge 2-3). Matematik model kurulurken, eşlenik nokta koordinatlarının hangi kaynaktan elde edildiğine dikkat edilmeli ve öngörülen matematik model ona göre seçilmelidir. Seçilen model istatistiksel testler ile desteklenmelidir.

5. Sonuç

Dönüşümü yapılacak koordinatların fiziksel özelliklerine göre dönüşüm türü belirlenmelidir. Örneğin, jeodezik koordinatlar arasındaki dönüşümlerde benzerlik dönüşümü öncelikli düşünülmeli, benzerlik dönüşümünde uyuşumsuz nokta çifti bulunmuyorsa, afin dönüşümü sonuçları iyileştirmek ve eski nokta koordinatlarında meydana gelebilecek bozulmaları (distorsiyonları) azaltmak için yapılmalıdır. Sözelimi fotogrametrik çalışmalarda kamera distorsiyonlarından kaynaklanan hataların azaltılmasında da afin dönüşümü kullanılabilir. Böyle durumlarda benzerlik dönüşümü, sonuçları denetlemek için kullanılmalıdır.

Son söz olarak, benzerlik ve afin dönüşümleri aynı anda uygulanmalı ve sonuçlar istatistiksel olarak test edilmelidir. Böylece çalışılan alanın yada problemin fiziksel özellikleri daha iyi anlaşılır ve daha sonra

yapılacak olan çalışmalar için öngörü ve deneyim kazanılmış olur.

6. Kaynaklar

- Demirel, H., 1997. Jeodezik Verilerin İrdelenmesi, Lisans Üstü Ders Notları, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, (Basılmadı).
- Hacısalihoğlu, H.H., 1990. 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri, Gazi Üniversitesi Yayın No:147, Fen Edebiyat Fakültesi Yayın No:18, Ankara, 1-41.
- Koch, K.R., 1999. Parameter estimation and hypothesis testing in linear models: second, updated and enlarged edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-08461-4, 302-309.
- Kurt, O., 2002, İki Boyutlu Benzerlik ve Afin Dönüşümleri, Bülent Ecevit (Zonguldak Karaelmas) Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Geomatik (Jeodezi ve Fotogrametri) Mühendisliği Bölümü, Seminer Çalışması, Zonguldak,, <https://www.researchgate.net/publication/281005862>, (17.09.2017).
- Kurt, O., 2010. Jeodezik Verilerin İrdelenmesi, Ders Notları, Kocaeli Üniversitesi, Harita Mühendisliği Bölümü, 2010. https://orhankurt.jimdo.com/app/download/8703636997/HRT402_JeoVer_Tek.pdf?t=1450994938, (17.09.2017).
- Leick, A., Rapoport, L., Tatarnikov, D., 2015, GPS Satellite Surveying, Fourt Edition, ISBN 978-1-118-67557-1 (cloth) – 9781119018285 (epdf) – 9781119018261 (epub), John Wiley & Sons, Inc Publication, Hoboken, New Jersey USA, 42-77.
- Malissiovas, G., Neitzel, F. & Petrovic, S., 2016, Götterdämmerung over total least squares. *Journal of Geodetic Science*, 6(1), pp. -. Retrieved 13 Apr. 2018, from doi:10.1515/jogs-2016-0003.
- Öztürk, E., Şerbetçi, M., 1996. Dengeleme hesabı, Cilt III, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi Genel Yayın No: 144, Trabzon, 258-347, 365-375.

İnternet kaynakları

1-<https://www.python.org/>, (17.09.2017)

2-<https://stackoverflow.com/questions/20126061/creating-a-confidence-ellipses-in-a-scatterplot-using-matplotlib>, (27.04.2017)